ÉLECTROMAGNÉTISME À LA SURFACE D'UN MÉTAL

Partie A

Charges à la surface d'un métal

L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct (Ox, Oy, Oz) de base ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$).

Le théorème de Gauss, appliqué à l'électrostatique, est rappelé : le flux sortant Φ du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ à travers une surface fermée, est égal au rapport de la charge totale intérieure Q_{int} sur la permittivité ε_o : $\Phi = \iint_{Surface\ fermée} \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_o}$.

La relation vectorielle locale, valable en tout point M de l'espace, entre le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ et le potentiel électrostatique $V(M)$, est rappelée : $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\ V(M)$.

I. Plan infini chargé dans le vide

Dans le vide, le plan infini yOz, d'équation $x = 0$, porte une répartition surfacique de charge Σ (unité : C m^{-2}), positive, uniforme et constante (figure **A.1**).

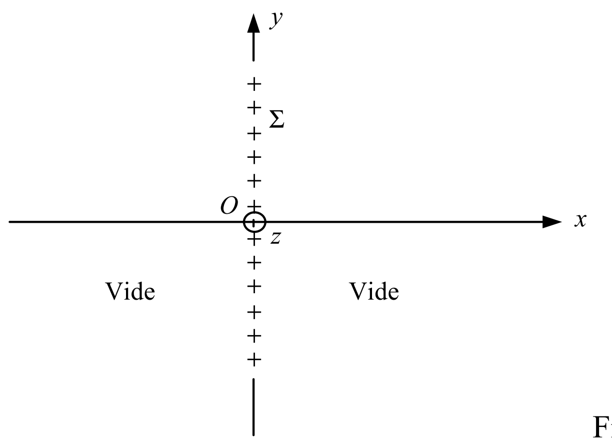

Figure **A.1**

1. Grâce à des considérations de symétrie, déterminer la direction du champ électrostatique $\overrightarrow{E_\Sigma}(M)$, créé par la distribution surfacique de charge Σ, en tout point M de l'espace.
2. Par application du théorème de Gauss (ou de toute autre méthode choisie par le candidat), établir, en fonction de Σ et ε_o, l'expression vectorielle du champ $\overrightarrow{E_\Sigma}(M)$ en tout point M de l'espace.
3. Sachant que le potentiel électrostatique $V(M)$ est connu à une constante près, déterminer l'expression de $V_\Sigma(M)$ créé, en tout point M de l'espace, par la distribution surfacique de charge. Le potentiel $V_\Sigma(x = 0)$ peut être choisi égal à V_o, constante positive.
4. En déduire l'allure des courbes représentatives des fonctions $E_\Sigma(x)$ et $V_\Sigma(x)$, pour tout $x \in \left]-\infty, +\infty\right[$.

II. Surface métallique chargée

Un conducteur métallique parfait occupe le demi-espace défini par $x \leq 0$. Le champ électrostatique à l'intérieur du métal est rigoureusement nul. La surface du conducteur, plan infini yOz d'équation $x = 0$, porte une répartition surfacique σ (unité : C m^{-2}), positive, uniforme et constante (figure **A.2**).

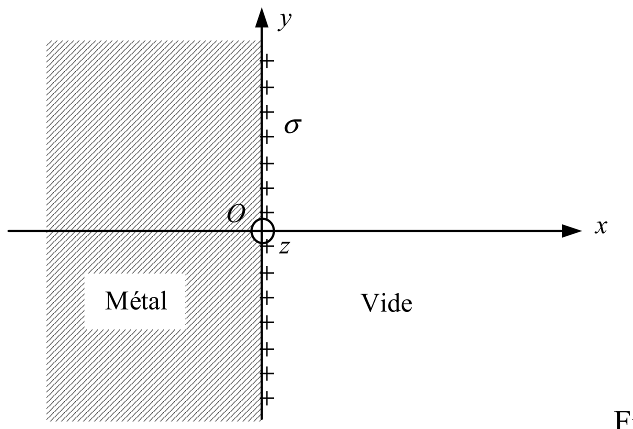

Figure **A.2**

1. Sans démonstration, préciser la direction du champ électrostatique $\overrightarrow{E_\sigma}(M)$ créé par la distribution surfacique de charge σ, en tout point M du demi-espace défini par $x > 0$.
2. Par application du théorème de Gauss (méthode, cette fois, fortement conseillée), établir pour $x > 0$ et en fonction de σ et ε_o, l'expression vectorielle du champ $\overrightarrow{E_\sigma}(M)$.
3. Déterminer l'expression de $V_\sigma(M)$ créé, en tout point de l'espace, par la distribution surfacique de charge. Le potentiel $V_\sigma(x = 0)$ peut être choisi égal à V_o, constante positive.
4. En déduire l'allure des courbes représentatives des fonctions $E_\sigma(x)$ et $V_\sigma(x)$, pour tout $x \in \left]-\infty, +\infty\right[$.

III. Présence d'une charge d'espace supplémentaire

Parallèlement à la surface chargée positivement du métal (le plan d'équation $x = 0$ porte toujours la répartition surfacique σ), la portion d'espace comprise entre les plans d'équation $x = 0$ et $x = \ell$ (avec $\ell > 0$), présente maintenant une répartition volumique de charge ρ (charge d'espace, unité : C m^{-3}), négative, uniforme et constante. La permittivité, dans cette portion d'espace, est supposée égale à ε_o (figure **A.3**).

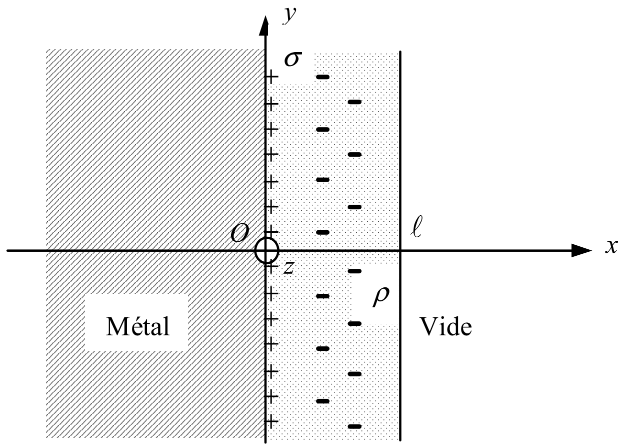

Figure **A.3**

1. Sans démonstration, préciser la direction du champ électrostatique $\overrightarrow{E_{tot}}(M)$ créé par l'ensemble des deux répartitions de charge (surfacique σ et volumique ρ), en tout point M du demi-espace défini par $x > 0$.

2. Par application du théorème de Gauss (méthode, une nouvelle fois, fortement conseillée), établir, en fonction des données de l'énoncé, l'expression vectorielle du champ $\overrightarrow{E_{tot}}\,(M)$:
   a) en tout point M, extérieur au métal et aux charges, tel que $x > \ell$;
   b) en tout point M, intérieur à la couche uniformément chargée, tel que $0 < x < \ell$.
3. Quelle relation doivent présenter σ et ρ pour que le champ électrostatique résultant $\overrightarrow{E_{tot}}\,(M)$ soit nul dans l'espace défini par $x > \ell$? Pourquoi cette relation est-elle appelée condition d'écrantage ?
4. Tracer, dans le cas $\overrightarrow{E_{tot}}\,(x > \ell) = \vec{0}$, l'allure de la courbe représentative de la fonction $E_{tot}(x)$, pour tout $x \in \left]-\infty,+\infty\right[$.