Corrigé de l'épreuve I – 2010

Partie A – Le phénomène de sédimentation

I. Déplacement des particules sous l'action des forces de pesanteur

I.1. Syst : part. M de masse m dans référentiel lié au sol, galiléen

Forces : $m\vec{g}$, $\vec{F}_f = -f\vec{v}$, $\vec{F}_A = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \vec{e_z}$

P.F.D : $\boxed{-mg\vec{e_z} - f\vec{v} + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \vec{e_z} = m\dot{\vec{v}}}$ (1)

I.2. $m = \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \boxed{\vec{F}_A = \frac{\rho}{\rho_0} mg\vec{e_z}}$

Rq : $m\vec{g} + \vec{F}_A = \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) mg\vec{e_z} = -m^* g \vec{e_z}$ avec $m^* = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) m > 0$
= masse effective

↳ bien dirigée vers le bas → les part. M tombent !

I.3. On projette (1) sur $\vec{e_z}$ avec $\vec{v} = v\vec{e_z}$:

$$-mg - fv + \frac{\rho}{\rho_0} mg = m\dot{v} \iff \boxed{\dot{v} + \frac{f}{m} v = \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) g} \quad (2)$$

I.4. Solution générale de (2) = sol. générale de (2) sans second membre + une solution particulière

Solution générale sans second membre :

$$\dot{v} + \frac{f}{m} v = 0 \iff \frac{dv}{v} = -\frac{f}{m} dt$$

on intègre : $\ln v(t) = -\frac{f}{m} t + \text{cste} \Rightarrow \underline{v(t) = C e^{-\frac{f}{m}t}}$ avec $C = \text{cste}$

Solution particulière de (2) :

$v(t) = C' = \text{cste}$ solution de (2) ssi : $\frac{f}{m} C' = \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) g$

$\Rightarrow v(t) = \frac{mg}{f}\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)$ est une sol. particulière de (2)

Solution générale de (2) :

$$v(t) = C e^{-\frac{f}{m}t} + \frac{mg}{f}\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)$$

qui doit vérifier $v(0) = v_0 = 0 \Rightarrow C = -\frac{mg}{f}\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)$

donc $\boxed{v(t) = \frac{mg}{f}\left(\frac{\rho}{\rho_0}-1\right)\left(1-e^{-\frac{f}{m}t}\right)}$

Rq : on a bien $v(t)<0$ (les part. tombent) car $\rho_0>\rho$ et $e^{-\frac{f}{m}t}<1$

I.5. $v(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{mg}{f}\left(\frac{\rho}{\rho_0}-1\right) = v_{lim} < 0$ car $\rho_0>\rho$

$$\Rightarrow \boxed{|v_{lim}| = \frac{mg}{f}\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)}$$

[Rq : On aurait pu obtenir v_{lim} directement :

$m\vec{g}+\vec{F_A}-f\vec{v} = m\vec{a}$

à $t=0$ $v_0=0$

à $t>0$ m tombe sous l'effet de la gravitation ($m\vec{g}+\vec{F_A}$ selon $-\vec{e_z}$)

$\rightarrow v(t)\uparrow \Rightarrow$ force frottement visqueux $-fv\uparrow$

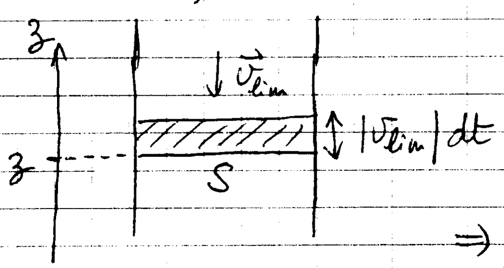
jusqu'à ce que cette force compense $m\vec{g}+\vec{F_A}$ et alors $a=0$

et $v(t) = \text{cste} = v_{lim}$

$\Rightarrow v(t)=v_{lim}$ lorsque $\dot{v}(t)=0$ soit d'après (2) : $\frac{f}{m}v_{lim} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}-1\right)g$]

I.6.a) En régime de sédimentation établi (càd en régime permanent) :

$v(t) = \text{cste} = v_{lim}$.



les part. qui vont traverser la surface S à z pendant la durée dt sont les part. situées dans le volume hachuré

$$\Rightarrow \boxed{\delta N_S = N^*(z)\, S\, |v_{lim}|\, dt = N^*(z)\,\frac{mg}{f}\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right) S\, dt}$$ (bien >0 !)

I.6.b) Le flux de particules lié à la sédimentation s'écrit

$$\phi_S = \iint_S \vec{j_S}\cdot\vec{dS} = \frac{\delta N_S}{dt}$$

or $\iint \vec{j_S}\cdot\vec{dS} = j_S(z)\, S$ (courant de sédimentation unidirectionnel + régime permanent $\rightarrow j_S$ indépendant de t)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j_S} = -j_S(z)\,\vec{e_z} = -\frac{\delta N_S}{S\,dt}\,\vec{e_z} = -N^*(z)\,\frac{mg}{f}\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\vec{e_z}}$$ (bien selon $-\vec{e_z}$)

Rq : on aurait aussi pu écrire en régime permanent ($\vec{v}(t) = \text{cste} = \vec{v}_{lim}$)

$$\vec{j}_S = N^*(z)\,\vec{v}_{lim} = -N^*(z)\frac{mg}{f}\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\vec{e}_z$$

II. Diffusion due à l'hétérogénéité de concentration.

II.1. On a : $\Phi_D = \iint_S \vec{j}_D \cdot \vec{dS} = j_D(z) S = \dfrac{\delta N_D}{dt}$ = flux de part. dû à la diffusion.

soit $\boxed{\delta N_D = j_D(z)\, S\, dt}$

II.2. D'après la loi de Fick :

$$\vec{j}_D = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}\,N^*(z) = -D\frac{dN^*(z)}{dz}\vec{e}_z \quad \text{(courant unidirectionnel)}$$

$$= j_D(z)\,\vec{e}_z \quad \text{(courant ascendant)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta N_D = j_D(z)\, S\, dt = -D\frac{dN^*(z)}{dz} S\, dt}$$

III. Equilibre

III.1. A l'équilibre, les 2 courants de sédimentation et de diffusion se compensent $\Rightarrow j_S = j_D \Rightarrow \boxed{\delta N_S = \delta N_D}$

[Rq : je suppose que stationnaire veut dire à l'équilibre (courant total nul) et permanent veut dire indépendant du temps ...]

III.2. D'après I.6.a et II.2 :

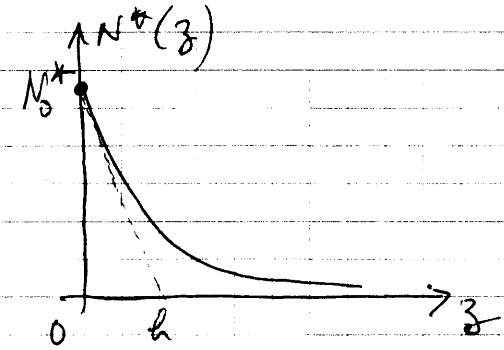
$$\delta N_S = \delta N_D \Leftrightarrow N^*(z)\, S\, |v_{lim}|\, dt = -D\frac{dN^*}{dz} S\, dt$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dN^*}{dz} + \frac{|v_{lim}|}{D} N^*(z) = 0}$$

III.3. $\dfrac{dN^*}{N^*} = -\dfrac{|v_{lim}|}{D}dz \Rightarrow \ln\dfrac{N^*(z)}{N_0^*} = -\dfrac{|v_{lim}|}{D} z$

soit $\boxed{N^*(z) = N_0^*\, e^{-\frac{|v_{lim}|}{D} z}}$ avec $N^*(z=0) = N_0^*$

III.4



on a bien accumulation de particules M au fond du récipient sous l'effet de la gravitation càd <u>sédimentation</u>

$N^*(z) = N_0^* e^{-z/h}$, $h = \frac{D}{|v_{lim}|}$ = hauteur caractéristique

III.5. Selon la théorie de Boltzmann :

$$N^*(z) = N_0^* \, e^{-mg(1-\frac{\rho}{\rho_0})\frac{z}{k_B T}} = N_0^* \, e^{-\frac{|v_{lim}|}{D} z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|v_{lim}|}{D} = \frac{mg}{k_B T}(1-\rho/\rho_0) \Leftrightarrow \frac{mg}{Df}(1-\rho/\rho_0) = \frac{mg}{k_B T}(1-\rho/\rho_0)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{k_B T = f D}$$

III.6. $f = 6\pi R\eta \Rightarrow \boxed{D = \frac{k_B T}{f} = \frac{k_B T}{6\pi R \eta}}$

<u>IV. Mesures et résultats</u>

IV.1. $N^*(z_1) = N_0^* \, e^{-\frac{mg}{k_B T}(1-\rho/\rho_0) z_1} = \frac{N_0^*}{3}$

$$\Rightarrow \frac{mg}{k_B T}(1-\rho/\rho_0) z_1 = \ln 3$$

soit $\boxed{m = \frac{k_B T \ln 3}{g(1-\rho/\rho_0) z_1}} = \frac{1{,}38 \times 10^{-23} \times 298 \times \ln 3}{9{,}81 \times (1-\frac{1}{1{,}25}) \times 4 \times 10^{-2}} \simeq \underline{5{,}76 \times 10^{-20}\ kg}$

$m = \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \boxed{R = \left(\frac{3m}{4\pi\rho_0}\right)^{1/3}} = \left(\frac{3 \times 5{,}76 \times 10^{-20}}{4\pi \times 1{,}25 \times 10^3}\right)^{1/3} \simeq \underline{22{,}2\ nm}$

IV.2. $\boxed{D = \frac{k_B T}{6\pi R\eta}} = \frac{1{,}38 \times 10^{-23} \times 298}{6\pi \times 22{,}2 \times 10^{-9} \times 1} \simeq \underline{0{,}98\ 10^{-14}\ m^2 \cdot s^{-1}}$

[<u>Rq</u> : $N^*(z) = N_0^* e^{-z/h} \Rightarrow N^*(z_1) = N_0^* e^{-z_1/h} = \frac{N_0^*}{3}$

$\Rightarrow h = \frac{z_1}{\ln 3} \simeq 0{,}036\ m$ = hauteur caractéristique de l'exp.
càd la hauteur sur laquelle $N^*(z)$ varie]