Corrigé de l'exo 3 de l'épreuve Méca I 2007

Le gazomètre

3.1 $V =$ volume utile (càd vol. contenu dans le récipient)
$= \pi R^2 H$ (l'épaisseur est faible)

À volume utile cst, R et H sont donc reliés par relation $H = \dfrac{V}{\pi R^2}$

Le poids de la cloche vaut $\rho_1 V_c \vec{g}$

avec $V_c =$ vol. de la cloche en acier

$$= 2\pi R e H + \pi R^2 e$$

$$= 2\cancel{\pi} e \frac{V}{\cancel{\pi} R^{\cancel{2}}} \cancel{R} + \pi e R^2 = \frac{2eV}{R} + \pi e R^2$$

Le poids de la cloche sera minimal pour V_c minimal

soit $\dfrac{dV_c}{dR} = 0 \iff -\dfrac{\cancel{2}\cancel{e}V}{R^2} + \cancel{2}\pi \cancel{e} R = 0$

$$\iff \pi R = \frac{V}{R^2} = \pi H \iff \boxed{R = H}$$

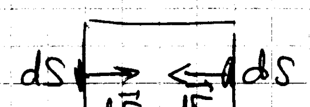
⇒ pour un même volume utile, la casserole la + légère est celle dont le rayon est égal à sa hauteur.

⇒ $V_c = 2\pi R e R + \pi R^2 e = 3\pi R^2 e$

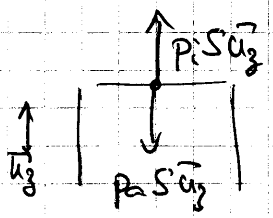
3.2 les forces s'exerçant sur la cloche sont :

- son poids $\vec{P} = \rho_1 V_c \vec{g} = \rho_1 3\pi R^2 e \vec{g}$
- résultante des forces de pression exercées par l'air et par l'eau intérieur et extérieur $= \vec{F}$

si on prend 2 surfaces dS ~~symétriques~~ sur les parois latérales et symétriques par rapport à l'axe du cylindre



$d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 = \vec{0}$ → la résultante des forces de pression sur les parois latérales est nulle



$\Rightarrow \vec{F}$ = force de pression exercée par l'air intérieur et extérieur sur le fond de la cloche

$$= (p_i - p_a)\,\pi R^2 \vec{u_z}$$

L'équilibre de la cloche s'écrit donc :

$$\vec{F} + \vec{P} = \vec{0} \iff (p_i - p_a)\cancel{\pi R^2} - 3\rho_1 g \cancel{\pi R^2} e = 0$$

$$\iff \boxed{p_i = p_a + 3\rho_1 g e}$$

3.3 D'après l'éq. de la statique des fluides dans l'eau

$$dp = -\rho_e g\, dz \Rightarrow \Delta p = -\rho_e g \Delta z$$

$$\Rightarrow p_i - p_a = \rho_e g \Delta h$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta h = \frac{p_i - p_a}{\rho_e g} = 3\frac{\rho_1}{\rho_e} e} \quad \text{(d'après 3.2)}$$

3.4 AN : $\underline{\underline{\Delta h}} = 3 \times \frac{7800}{1000} \times 4 = \underline{\underline{93{,}6 \text{ mm}}}$