Corrigé de la partie B de Physique I 2006

Modèles atmosphériques

I. Généralités

1°) L'équation de la statique des fluides :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, P(M) = \rho(M)\,\vec{g}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 & (2) \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho(M) g & (3) \end{cases}$$

(1) et (2) $\Rightarrow P(M) = P(z)$

$\Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial z}$ ne dépend que de $z \Rightarrow \rho(M) = \rho(z)$

et (3) devient : $\boxed{dP = -\rho(z) g\, dz}$

2°) L'éq. d'état du gaz parfait est :

$\boxed{pV = nRT}$ avec n = nbre de mole du vol V à T et p
R = cste des gaz parfaits

3°) On a : $\left.\begin{array}{l} \rho = \dfrac{m}{V} \\ m = n\overline{M} \end{array}\right\} \Rightarrow \rho = \dfrac{n\overline{M}}{V}$

or $n = \dfrac{pV}{RT}$ donc $\rho = \dfrac{\overline{M}}{R}\dfrac{p}{T}$

soit ici avec ρ dépendant de z : $\boxed{\rho(z) = \dfrac{\overline{M}}{R}\dfrac{P(z)}{T(z)}}$

II 1er modèle : atmosphère isotherme

1°) D'après I avec $T(z) = T_0$:

$$dP = -\rho(z) g\, dz = -\frac{\overline{M}g}{RT_0} P(z)\, dz$$

soit $\frac{dP}{P} = -\frac{\bar{M}g}{RT_0} dz$

On intègre entre $z=0$ et z :

$$\int_0^z \frac{dP}{P} = -\frac{\bar{M}g}{RT_0} \int_0^z dz \Leftrightarrow \ln \frac{P(z)}{P_0} = -\frac{\bar{M}g}{RT_0} z$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(z) = P_0 \, e^{-\frac{\bar{M}g}{RT_0} z} = P_0 \, e^{-\frac{z}{H}}} \quad \text{avec } H = \frac{RT_0}{\bar{M}g}$$

2°) $\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{P(z)-P_0}{P_0} = e^{-\frac{z}{H}} - 1 < 0$ pour $z>0$

$\Rightarrow \left|\frac{\Delta P}{P_0}\right| = 1 - e^{-\frac{z}{H}}$ fct ↑ de z

or pour $0 \leq z \leq z_1$, on a $\left|\frac{\Delta P}{P_0}\right| \leq 10^{-2}$

on a donc $1 - e^{-\frac{z_1}{H}} = 10^{-2} \Leftrightarrow e^{-\frac{z_1}{H}} = 1 - 10^{-2} = 0,99$

$$\Leftrightarrow \boxed{z_1 = -H \ln 0,99}$$

3°) AN : $\underline{\underline{H}} = \frac{8,3 \times 290}{29 \times 10^{-3} \times 9,8} \simeq \underline{\underline{8469\ m}}$ (hauteur caractéristique des variations de p)

$\underline{\underline{z_1}} = -8469 \times \ln 0,99 \simeq \underline{\underline{85\ m}}$ (pour $z \leq z_1$, $P(z) \simeq$ cste)

III 2d modèle : atmosphère avec gradient thermique

D'après I avec $T(z) = T_0 + \lambda z$:

$$dP = -\frac{\bar{M}g}{R} \frac{P(z)}{T_0 + \lambda z} dz$$

$$\Rightarrow \int_0^z \frac{dP}{P} = -\frac{\bar{M}g}{R} \int_0^z \frac{dz}{T_0 + \lambda z} \Leftrightarrow \ln \frac{P(z)}{P_0} = -\frac{\bar{M}g}{R\lambda} \ln \frac{T_0 + \lambda z}{T_0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(z) = P_0 \left(1 + \frac{\lambda}{T_0} z\right)^{-\frac{\bar{M}g}{R\lambda}} = P_0 \left(1 + \frac{\lambda}{T_0} z\right) e^{-\frac{T_0}{\lambda H}}}$$