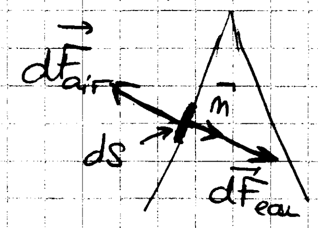
Corrigé de l'exo 1 de l'épreuve Méca I 2004

Récipient à fond conique

1.1 $\vec{dF}$ = force de pression exercée sur surface dS à l'altitude y du cône

$= \vec{dF}_{eau} + \vec{dF}_{air}$

$= p(y)\, dS\, \vec{n} - p_a\, dS\, \vec{n}$

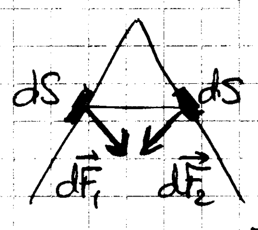


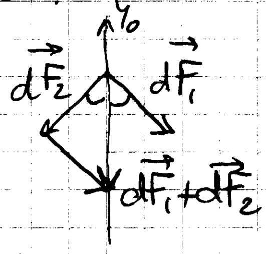
avec p_a = pression atmosphérique indépendante de y

et $p(y) = p_a + \rho g (H-y)$ (d'après l'éq. stat. des fluides ds liquide $dp = -\rho g dy$ avec (Oy) vers le haut et $p(H) = p_a$)

$\rightarrow \underline{\vec{dF} = \rho g (H-y) dS\, \vec{n}}$

or en prenant 2 surfaces dS symétriques par rapport à l'axe de révolution (Oy_0) on a :



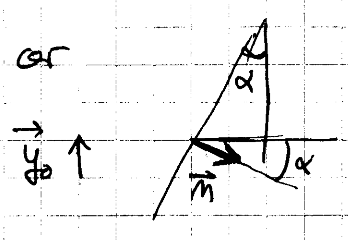


$\Rightarrow \vec{dF_1} + \vec{dF_2}$ selon $-\vec{y_0}$

$\Rightarrow$ la résultante $\vec{F} = \iint_{cône} \vec{dF}$ est selon $-\vec{y_0}$

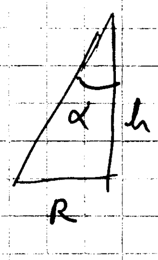
$\Rightarrow F_y = \vec{F}\cdot\vec{y_0} = \rho g \iint_{cône} (H-y)\, dS\, \vec{n}\cdot\vec{y_0}$

or



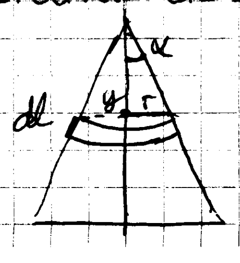
$\vec{n}\cdot\vec{y_0} = -\sin\alpha$

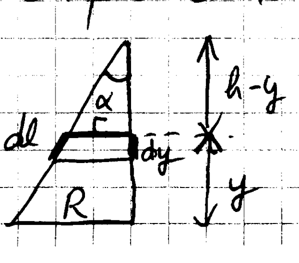
avec $\sin\alpha = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}$



$$\Rightarrow F_y = -\rho g \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}} \iint_{cône} (H-y)\, dS$$

Considérons dS = surface de la couronne de largeur dl à l'altitude y





$dS = 2\pi r\, dl$

avec $\left.\begin{array}{l} r = (h-y)\tan\alpha \\ \tan\alpha = R/h \end{array}\right\}\ r = (h-y)\dfrac{R}{h}$

et $\left.\begin{array}{l} dl = \dfrac{dy}{\cos\alpha} \\ \cos\alpha = \dfrac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} \end{array}\right\} \quad dl = \dfrac{\sqrt{R^2+h^2}}{h}\,dy$

$\Rightarrow \underline{dS = 2\pi \frac{R}{h^2}\sqrt{R^2+h^2}\,(h-y)\,dy}$

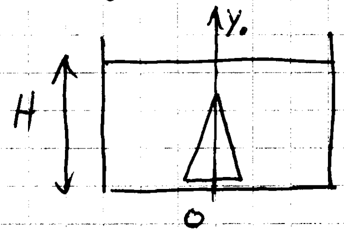
$\Rightarrow F_y = -\rho g \frac{R}{\cancel{\sqrt{R^2+h^2}}}\, 2\pi\frac{R}{h^2}\cancel{\sqrt{R^2+h^2}} \int_0^h (H-y)(h-y)\,dy$

$= -\rho g \frac{2\pi R^2}{\cancel{h^2}}\left[H\cancel{h^2} - (H+h)\frac{\cancel{h^2}}{2} + \frac{h^{\cancel{3}}}{3}\right]$

$= -\rho g \pi R^2 \left(H - \frac{h}{3}\right)$

soit $\boxed{\vec{F} = -\rho g \pi R^2 \left(H-\frac{h}{3}\right)\vec{y}_0}$ (bien dirigée vers le bas)

1.2 On suppose cône plein flottant sur le fond (càd à peine détaché du fond) du récipient non percé.



$\vec{P}_A$ = poussée d'Archimède

= résultante des forces de pression exercées par l'eau sur le cône

= force de pression exercée par l'eau sur côtés du cône + force de pression exercée par l'eau sur fond du cône

$= \quad \vec{F}_{eau} \quad + \quad p(0)\,\pi R^2\,\vec{y}_0$

$\Rightarrow \vec{F}_{eau} = \vec{P}_A - (p_a + \rho g H)\,\pi R^2\,\vec{y}_0$

or $\vec{P}_A = -$ poids du volume d'eau déplacé

$= \rho g V \vec{y}_0$ avec $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ = vol. du cône.

$\Rightarrow \underline{\vec{F}_{eau} = \rho g \pi R^2 \left(\frac{h}{3} - H\right)\vec{y}_0 - p_a \pi R^2 \vec{y}_0}$

et $\vec{F} = \vec{F}_{eau} + \vec{F}_{air}$

$\hookrightarrow$ force de pression exercée par l'air dans 1.1

$= \iint_{cône} d\vec{F}_{air} = -p_a \iint_{cône} dS\,\vec{n}$

Or on a vu au début du 1.1 que la force de pression exercée par l'air est compensée par le terme en pa dans $d\vec{F}_{eau}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\rho g \pi R^2 \left(H - \frac{h}{3}\right) \vec{y_0}}$$ (on retrouve bien le résultat du 1.1)

1.3 AN : $\|\vec{F}\| = 10^3 \times 9{,}81 \times \pi \times (0{,}05)^2 \left(0{,}15 - \frac{0{,}1}{3}\right)$

$\simeq \underline{\underline{8{,}989\ N}}$

- on aurait pu calculer $\vec{F_{air}}$ dans 1.2 et vérifier que les termes en pa disparaissent bien :

$\vec{F_{air}}$ selon $+\vec{y_0}$ $\rightarrow$ $F_{air\,y} = -pa \iint_{cône} dS\, \vec{n}\cdot\vec{y_0}$

$$= pa \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}\ S$$

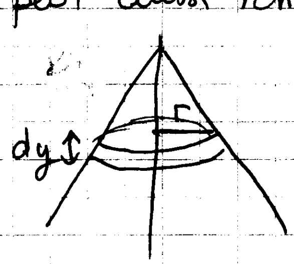
Soit S la surface du cône : $\boxed{S = \iint_{cône} dS} = 2\pi \frac{R}{h^2}\sqrt{R^2+h^2} \int_0^h (h-y)\,dy$ (d'après 1.1)

$$= \frac{2\pi R}{h^2}\sqrt{R^2+h^2}\left(h^2 - \frac{h^2}{2}\right) = \boxed{\pi R\sqrt{R^2+h^2}}$$

$\Rightarrow \vec{F_{air}} = pa\, \pi R^2 \vec{y_0}$

et $\vec{F} = \vec{F_{eau}} + \vec{F_{air}} = \rho g \pi R^2 \left(\frac{h}{3} - H\right)\vec{y_0}$ en accord avec 1.1

- on peut aussi retrouver le volume d'un cône :



$$\boxed{V = \int_0^h \pi r^2 dy} = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h (h-y)^2 dy \text{ (d'après 1.1)}$$

$$= \pi \frac{R^2}{h^2}\left(h^2 h - 2h\frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3}\right)$$

$$\boxed{= \frac{1}{3}\pi R^2 h} = \frac{1}{3} \text{ du volume du cylindre.}$$