CY Cergy Paris Université 2024-2025
Complément d'optique géométrique/mécanique
S2-CUPGE-MP/PC
C. Pinettes

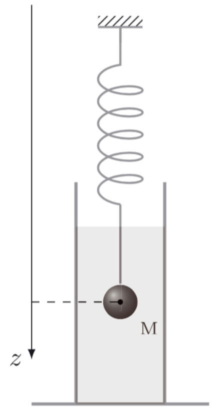
TD n^{o}3 : Oscillations mécaniques amorties

Ex. 1 : Viscosimètre oscillant

Une bille de masse m et de rayon r est suspendue à un ressort de raideur k et longueur à vide ℓ_0 et plongée dans un liquide de coefficient de masse volumique ρ_ℓ et de viscosité η.
Lorsque la bille est animée d'une vitesse $\vec{v}$, elle est soumise à une force de frottement fluide donnée par la formule de Stokes :

$$\vec{f} = -\ 6\pi\eta r\ \vec{v}$$

Un capteur de position fournit l'évolution de la position $Z(t)$ de la bille par rapport à sa position d'équilibre.



1. Déterminer la longueur ℓ_e du ressort lorsque la bille est à l'équilibre.
2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $Z(t)$ dans le référentiel terrestre. L'écrire sous forme canonique. Exprimer la pulsation propre ω_0 et le facteur qualité Q en fonction des données du problème.
3. Lorsqu'on écarte la bille de sa position initiale à la cote $Z_0 > 0$ et qu'on la lâche sans vitesse initiale, la bille oscille. Que peut-on dire du facteur qualité ? En déduire l'expression de $Z(t)$. Tracer qualitativement $Z(t)$ au cours de ce mouvement. Donner les expressions de la pseudo-période T et du temps de relaxation τ.
4. Dans l'air, où les frottements sont négligeables, la période des oscillations est T_0. Déterminer l'expression du coefficient de viscosité η du liquide en fonction de m, r, T et T_0.

Ex. 2 : Oscillations amorties d'un pendule simple [*à faire à la maison*]

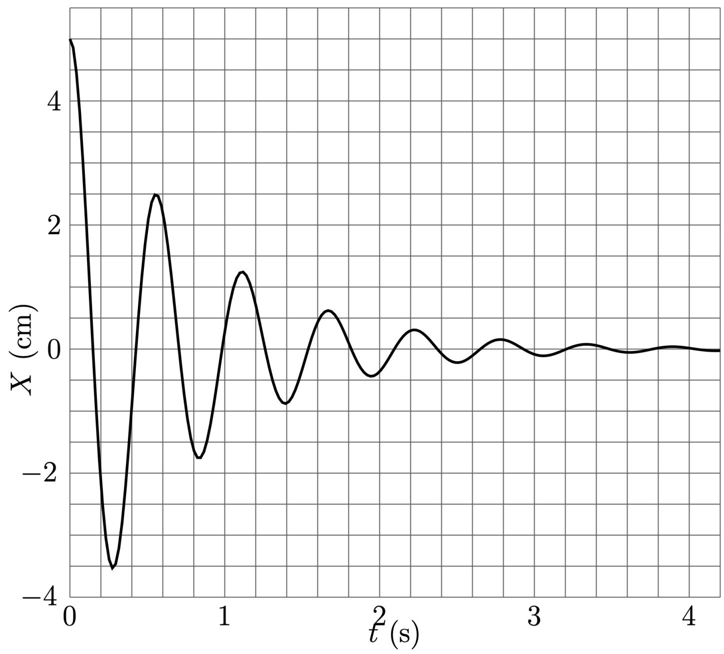
Une masse ponctuelle m est suspendue à l'extrémité M d'un fil inextensible, de masse négligeable et de longueur L. L'autre extrémité O du fil est fixe. La masse m se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ est soumise à une force de frottement fluide $\vec{f} = -h\ \vec{v}$.
On supposera ici que le mouvement de la masse est plan et on notera θ l'angle entre le fil et la verticale. On négligera les frottements au niveau de l'axe de rotation.

1. Déterminer l'équation différentielle du mouvement de m en appliquant la 2ème loi de Newton.
2. Retrouver cette équation par une méthode énergétique.

3. A $t = 0$, on écarte le fil d'un angle θ_0 petit et on l'abandonne sans vitesse initiale. Donner la condition sur h pour que le régime d'amortissement soit pseudo-périodique. On supposera cette condition vérifiée dans toute la suite de l'exercice.
4. Déterminer l'expression de $\theta(t)$ dans l'approximation de petites oscillations. Donner l'allure de la courbe $\theta(t)$.

Ex. 3 : Détermination expérimentale d'un coefficient de frottement

On considère un oscillateur harmonique amorti par un frottement fluide constitué d'une masse $m = 100$ g soumise à une force élastique (ressort de raideur $k = 5$ N.m^{-1}) et à une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\,\vec{v}$, $\vec{v}$ étant la vitesse de la masse m. La figure ci-dessous représente le relevé expérimental de la position $X(t)$ de la masse m par rapport à sa position d'équilibre $X = 0$.



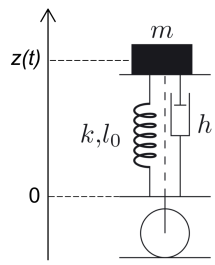
1. Quel est le régime d'oscillation de la masse ? En déduire une condition sur le facteur qualité Q. Rappeler l'expression générale de $X(t)$ et l'expression de la pseudo-période des oscillations T en fonction de Q.
2. Quelles sont les conditions initiales de ce mouvement ? En déduire l'expression de $X(t)$.
3. On définit le décrément logarithmique δ par : $\delta = \ln[X(t)/X(t+T)]$. Exprimer δ en fonction de Q uniquement.
4. Déterminer graphiquement δ et T. En déduire la valeur de Q et du coefficient de frottement fluide α.

Ex. 4 : Oscillateur très faiblement amorti [*à faire à la maison*]

On considère un oscillateur harmonique horizontal très faiblement amorti, de masse m, de pulsation propre ω_0 et de facteur qualité $Q \gg 1$.

1. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par l'élongation $x(t)$ de l'oscillateur par rapport à sa position d'équilibre.
2. Quel est le régime d'oscillation de cet oscillateur ? En déduire les expressions approchées de sa pseudo-période T, de son élongation et de sa dérivée.
3. Donner l'expression du temps de relaxation τ de l'oscillateur. Montrer que le facteur qualité Q fournit ici un ordre de grandeur du nombre d'oscillations observables.
4. Donner l'expression approchée de l'énergie mécanique $E_m(t)$ de m.
5. En déduire dE_m/dt. Commenter son signe.
6. Donner l'expression approchée en fonction de Q de la variation relative de $E_m(t)$ pendant une période T : $\dfrac{\Delta E_m}{E_m} = \dfrac{E_m(t+T) - E_m(t)}{E_m(t)}$.
   En déduire une interprétation énergétique du facteur qualité Q.

Ex. 5 : Suspension d'un véhicule



On modélise la suspension d'une roue de voiture par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 en parallèle avec un amortisseur de coefficient de frottement h. Lorsque la voiture est animée d'une vitesse verticale $\vec{v}_z$ dans le référentiel de la route, l'amortisseur la soumet à une force de frottement fluide $\vec{f} = -h\,\vec{v}_z$

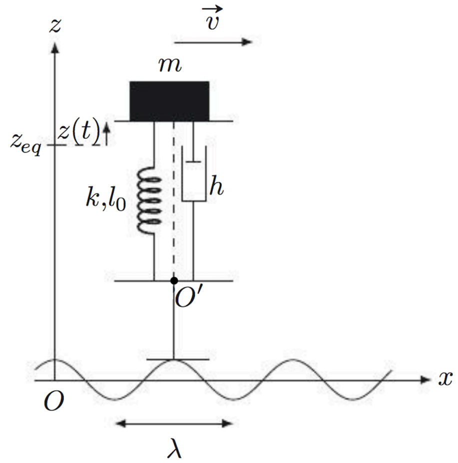
On supposera que la masse M de la voiture est également répartie sur les 4 roues, de sorte que chaque roue supporte la masse $m = M/4$. Les masses des roues et de leurs suspensions sont négligeables devant celle de la voiture. Et on repèrera la position du centre de masse de la voiture par sa cote $z(t)$, comme indiqué sur la figure.

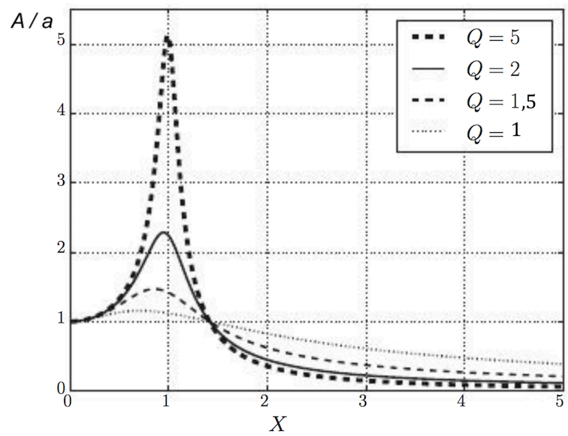
On donne : $M = 1,3 \times 10^3$ kg ; $k = 1,5 \times 10^4$ N.m^{-1}.

1. Quelle est l'unité SI de h ?
2. Etablir l'expression de la position z_e de la voiture au repos en fonction des données de l'énoncé.
3. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ dans le référentiel terrestre. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $Z(t) = z(t) - z_e$. L'écrire sous forme canonique.
4. On réalise un essai dynamique à vide au cours duquel le châssis est abaissé d'une hauteur a et libéré sans vitesse initiale. Quelle valeur de h choisir pour que le retour à l'équilibre se fasse le plus rapidement possible et sans oscillations ? Faire l'A.N. et tracer l'allure de $z(t)$ dans ce cas.
5. L'usure des amortisseurs est responsable d'une diminution du coefficient de frottement au cours du temps. Quel est alors le régime d'amortissement ? Représenter l'allure de $z(t)$ si on refait l'essai précédent. Qu'en résulte-t-il pour le confort des passagers ?

Ex. 6 : Skieur secoué

Un skieur peu expérimenté parvenant en bas d'une piste ralentit fortement et se raidit au passage d'une portion horizontale présentant des ondulations marquées et a la désagréable sensation d'être secoué. En observant autour de lui, il remarque que des skieurs qui vont vite ou qui sont souples sur leurs jambes passent le champ de bosses sans secousses notables. Nous allons tenter d'expliquer ce phénomène.
Nous allons modéliser le skieur par un corps de masse M et chacune de ses jambes par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, en parallèle avec un amortisseur de coefficient d'amortissement h, chaque jambe portant la masse $m = M/2$. On admet que la force exercée par l'amortisseur sur le skieur vaut $\vec{f} = -h(\dot{z} - \dot{z}_{O'})\ \vec{u}_z$.





On supposera que le skieur glisse sur la piste avec une vitesse constante $\vec{v} = v\,\vec{u}_x$ et que le profil de la piste impose au point O' d'un de ses genoux le mouvement :

$$z_{O'}(t) = L + a\ \cos\left(\frac{2\pi x(t)}{\lambda}\right)$$

$x(t)$ étant l'abscisse de O', a une constante positive et λ la distance entre 2 bosses successives. La cote $z(t)$ de la masse m est repérée à partir de sa position d'équilibre, lorsque le skieur est au repos et que $z_{O'} = L$.

On donne : $M = 80$ kg ; $k = 3,0 \times 10^2$ N.m^{-1}.

1. Donner l'expression de $x(t)$ en supposant que O' est la verticale de O à l'instant initial.
2. Déterminer l'équation du mouvement vertical de la masse m dans le référentiel terrestre. L'écrire sous forme canonique.
3. En déduire l'expression du rapport A/a où A est l'amplitude des oscillations verticales du skieur en régime permanent, en fonction de Q et $X = \dfrac{2\pi v}{\lambda \omega_0}$.
4. Le graphe ci-dessus montre l'évolution de ce rapport en fonction de X pour différentes valeurs de Q. Commenter les observations faites par le skieur.