

Partie B

Électromagnétisme

Les paragraphes **I** et **II** proposent l'étude de quelques phénomènes dissipatifs liés à l'induction.

Dans un référentiel \mathcal{R} , en un point M d'un circuit conducteur se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_e(M)_{/\mathcal{R}}$ dans un champ magnétique $\vec{B}(M)$, il apparaît le champ électromoteur induit :

$$\vec{E}_m(M)_{/\mathcal{R}} = (\vec{v}_e(M)_{/\mathcal{R}} \wedge \vec{B}(M)) - \frac{\partial \vec{A}(M,t)}{\partial t} \quad (1)$$

$\vec{A}(M,t)$ est le potentiel vecteur lié au champ $\vec{B}(M)$ par les relations $\vec{B}(M) = \text{rot} \vec{A}(M,t)$ et $\text{div} \vec{A} = 0$. Ces deux relations locales permettent l'établissement de la relation intégrale, valable pour toute surface S , non fermée, s'appuyant sur le contour C :

$$\oint_C \vec{A} d\vec{\ell} = \iint_S \vec{B} d\vec{S}$$

L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct (Ox, Oy, Oz) de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On pourra utiliser, le cas échéant, le système de coordonnées cylindriques, constitué du triplet $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.

I. Disque métallique en rotation dans un champ magnétique

Un disque métallique parfaitement conducteur (cuivre), de centre O , d'épaisseur h et de conductivité γ , est situé dans le plan xOy .

Ce disque est entraîné, autour de son axe Oz , par un moteur, dans un mouvement de rotation de vitesse angulaire ω .

Un dispositif, non précisé ici, engendre un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$, uniforme dans toute l'épaisseur du disque, à l'intérieur d'un volume demi-cylindrique de rayon R , contenant tous les points $M(x,y,z)$ du disque tels que $0 \leq r \leq R$ et $x \geq 0$, avec r distance du point M à l'axe Oz (figure 4).

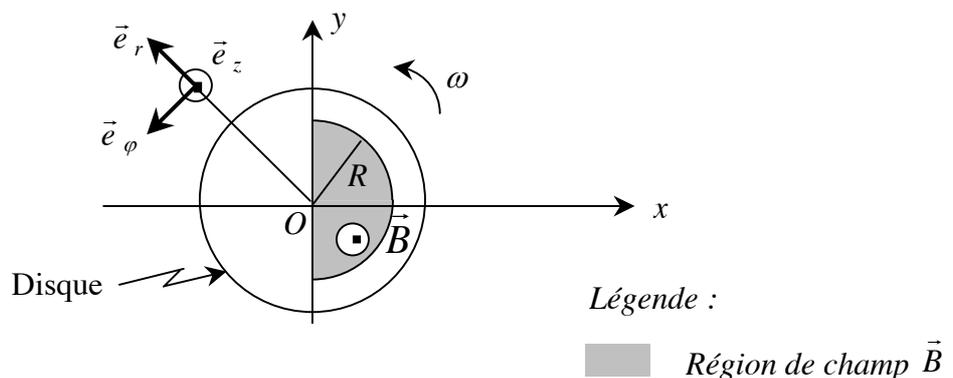


Figure 4

- 1) \vec{B} est un vecteur uniforme et constant. Montrer que l'expression vectorielle (1) définissant le champ électromoteur induit $\vec{E}_m(M)_{/R}$ se simplifie.
- 2) Soit un point M du disque, situé à la distance r de l'axe Oz .
- 2.1. Écrire, en fonction de r , ω et \vec{e}_φ , l'expression vectorielle de la vitesse $\vec{v}_e(M)$ du point M .
 - 2.2. En déduire l'expression vectorielle du champ électromoteur induit $\vec{E}_m(M)$ lorsque le point M se trouve dans le champ magnétique.
 - 2.3. Recopier, approximativement, la figure 4 et représenter le vecteur $\vec{E}_m(M)$ en un point choisi dans la région où règne le champ magnétique.
 - 2.4. Le conducteur obéit à la loi d'Ohm locale. En déduire l'expression vectorielle du vecteur densité de courant induit $\vec{j}_i(M)$.
 - 2.5. Le champ électromoteur $\vec{E}_m(M)$ agit-il dans un circuit ouvert ou dans un circuit fermé ?
 - 2.6. Compléter, en fonction de la réponse donnée à la question précédente, le dessin du §.I.2.3. :
 - dans l'hypothèse d'un circuit ouvert, indiquer les zones d'accumulation et de défaut d'électrons ;
 - dans l'hypothèse d'un circuit fermé, proposer le tracé d'un circuit que peuvent emprunter les charges mises en mouvement.
- 3) Dans la partie du disque soumise au champ \vec{B} , le courant induit dissipe une puissance volumique donnée par l'expression $(dP/d\tau) = \gamma \vec{E}_m^2$, avec $d\tau$, volume élémentaire de conducteur.
- 3.1. Sous quelle forme cette puissance électrique est-elle dissipée (ou dégradée) ?
 - 3.2. Exprimer, en fonction de γ , r , ω et B_o , la puissance volumique $(dP/d\tau)$ mise en jeu.
 - 3.3. Déterminer la puissance totale P_I dissipée dans le volume de conducteur, soumis au champ magnétique.
 - 3.4. Quel pourrait être l'effet de ce phénomène dissipatif sur la vitesse de rotation du moteur ?
 - 3.5. *Application pratique*
Citer une application de ce dispositif électromagnétique.
 - 3.6. *Application numérique*
 $\gamma = 5,8 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$; $\omega = 1,0 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$; $h = 5,0 \times 10^{-3} \text{ m}$; $R = 0,10 \text{ m}$; $B_o = 1,0 \times 10^{-2} \text{ T}$.
Calculer la puissance P_I .

II. Matériau conducteur soumis à un champ magnétique variable

- 1) Une spire S , formée d'un fil conducteur de diamètre négligeable, est placée dans un plan parallèle au plan xOy . De rayon R_o et de centre $P(0,0,z)$ choisi sur l'axe Oz , la spire est parcourue par un courant i . Le champ magnétique, créé au point O , est donné par la formule (2) (qui n'est pas à établir) :

$$\vec{B}(O) = B\vec{e}_z = \frac{\mu_o i}{2R_o} \sin^3 \alpha \vec{e}_z \quad (2)$$

α est l'angle $(\vec{e}_z, -\vec{r})$; r est la distance entre les points de S et l'origine O (figure 5).

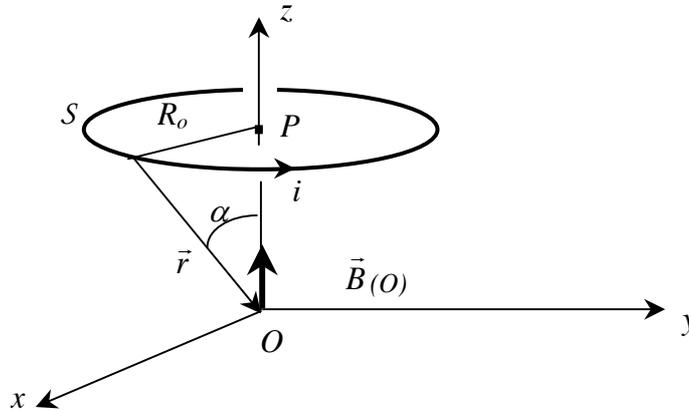


Figure 5

Utiliser le résultat (2) pour déterminer le champ magnétique créé en O par un solénoïde infiniment long, d'axe Oz , et constitué par un empilement de spires jointives (n spires identiques à S par unité de longueur) et parcourues par le courant i .

- 2) Les spires du solénoïde sont parcourues par un courant variable. On admet qu'à l'intérieur de ce bobinage, le champ magnétique créé est uniforme dans l'espace : $\vec{B} = B\vec{e}_z$, mais B est variable dans le temps selon la loi $B(t) = B_m \sin \omega t$.

Des considérations de symétrie permettent de montrer que le potentiel vecteur $\vec{A}(M,t)$, associé au champ magnétique, en un point M situé à la distance ρ de l'axe Oz (avec $\rho < R_o$), est tangent au cercle C de rayon ρ et d'axe Oz . $\vec{A}(M,t)$ s'écrit alors sous la forme $\vec{A}(M,t) = A(\rho,t)\vec{e}_\phi$. Exprimer, en fonction de ρ , B_m , ω et t , le potentiel vecteur $A(\rho,t)$.

- 3) Un cylindre métallique (cuivre) de rayon R (avec $R < R_o$), de hauteur H et de conductivité γ , est placé à l'intérieur du solénoïde. Le barreau et le bobinage sont coaxiaux (axe Oz) et immobiles (figure 6).

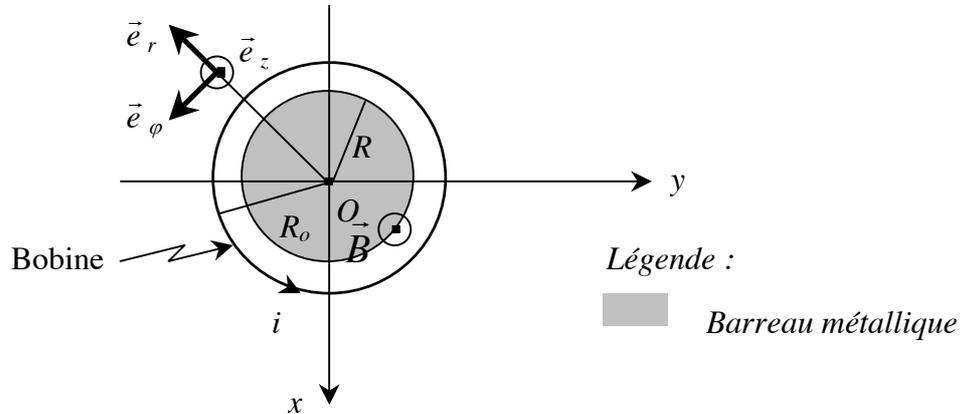


Figure 6

- 3.1. Montrer qu'à l'intérieur du barreau, l'expression (1) du champ électromoteur se simplifie.
 - 3.2. Exprimer, en fonction de ρ , ω , B_m et t , la norme E_m du champ électromoteur.
 - 3.3. Recopier, approximativement, la figure 6 et présenter le tracé de quelques lignes de courants induits.
 - 3.4. Ce type de courants porte le nom d'un Physicien. Lequel ?
- 4) Dans le barreau, totalement soumis au champ \vec{B} variable, les courants induits dissipent une puissance volumique instantanée, définie par $(dP/d\tau) = \gamma \vec{E}_m^2$.
- 4.1. Sous quelle forme cette puissance est-elle dissipée ?
 - 4.2. Déterminer, en fonction de γ , ρ , B_m , ω et t , la puissance volumique instantanée $(dP/d\tau)$ mise en jeu.
 - 4.3. En déduire la puissance volumique moyenne dissipée $\langle dP/d\tau \rangle$.
 - 4.4. Exprimer, en fonction de γ , H , R , B_m et ω , la puissance moyenne totale P_{II} dégagée dans tout le barreau métallique.
 - 4.5. *Application pratique*
Citer une application de ce dispositif électromagnétique.
 - 4.6. *Application numérique*
 $\gamma = 5,8 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$; $\omega = 5,0 \times 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$; $H = 0,20 \text{ m}$; $R = 5,0 \times 10^{-2} \text{ m}$; $B_m = 2,0 \times 10^{-4} \text{ T}$.
Calculer la puissance moyenne totale P_{II} dégagée.

Fin de l'énoncé