Corrigé de la partie B de l'épreuve Phys. I - 2003

Electrostatique

Une distr. de charges à sym. sphérique crée un champ radial $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e_r}$ tq $E(r) = \frac{k}{2\varepsilon_0}$ pr $0 \leq r \leq R$

$E(r) = \frac{kR^2}{2\varepsilon_0 r^2}$ pr $r \geq R$. avec $k > 0$.

I. Potentiel électrostatique V(r) :

1. On a : $dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -E(r)dr$

donc pour $0 \leq r \leq R$: $dV = -\frac{k}{2\varepsilon_0} dr \Rightarrow V(r) = -\frac{k}{2\varepsilon_0} r + C_1$

$r \geq R$: $dV = -\frac{kR^2}{2\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow V(r) = \frac{kR^2}{2\varepsilon_0} \frac{1}{r} + C_2$

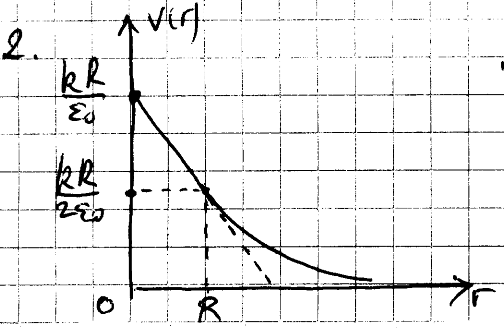
par convention : $\lim_{r \to +\infty} V(r) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

de +, V(r) doit être continu partout, donc en particulier en $r = R$:

$\hookrightarrow -\frac{kR}{2\varepsilon_0} + C_1 = \frac{kR}{2\varepsilon_0} \Leftrightarrow C_1 = \frac{kR}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} V(r) = \frac{k}{\varepsilon_0}\left(R - \frac{r}{2}\right) & \text{pour } 0 \leq r \leq R \\ V(r) = \frac{kR^2}{2\varepsilon_0} \frac{1}{r} & \text{pour } r \geq R \end{array}}$$

2.



V(r) bien continu partout et sa pente aussi car $\frac{dV}{dr} = -E(r)$ est continu partout.

II Charge volumique ρ(r) :

1. D'après la forme locale du th de Gauss : $\rho(r) = \varepsilon_0 \,\mathrm{div}\,\vec{E}(r)$

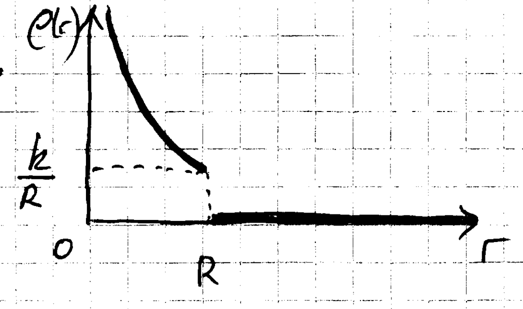
or $\mathrm{div}\,\vec{E}(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 E(r)\right)$

donc pour $0 < r < R$: $\mathrm{div}\,\vec{E}(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{k}{2\varepsilon_0}\right) = \frac{k}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}$

$r > R$: $\mathrm{div}\,\vec{E}(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{kR^2}{2\varepsilon_0}\right) = 0$

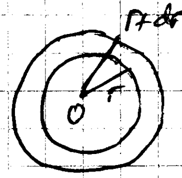
$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \rho(r) = \frac{k}{r} & \text{pour } 0 < r < R \\ \quad = 0 & \text{pour } r > R \end{array}}$$

2.



III Charge totale q_0 :

1.



la charge de la couche sphérique :

$$\boxed{dq = \rho(r)\, r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho(r)\, 4\pi r^2 dr}$$

2. $$\boxed{q_0 = \int_{r=0}^{r=+\infty} dq = \int_0^R \frac{k}{r} 4\pi r^2 dr = 2\pi k R^2}$$

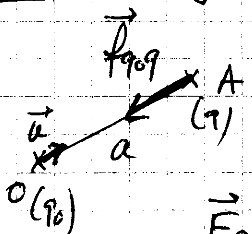
3. $$E(r) = \frac{kR^2}{2\varepsilon_0 r^2} \quad \text{or} \quad kR^2 = \frac{q_0}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \quad \text{pour } r \geq R$$

bien = chp créé par charge ponctuelle q_0 en O

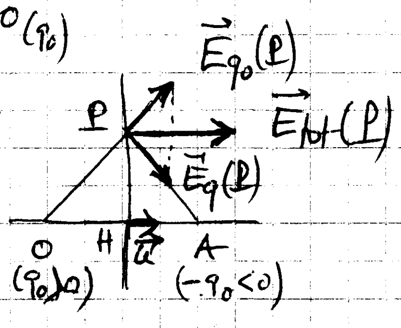
IV Deux charges électriques ponctuelles

1.



$$\boxed{\vec{f}_{q_0 q} = q\, \underbrace{\vec{E}_{q_0}(A)}_{\text{créé par } q_0 \text{ en } A} = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\, \vec{u}}$$

2.1



D'après le th. de superposition :

$$\vec{E}_{tot}(P) = \vec{E}_{q_0}(P) + \vec{E}_q(P)$$

avec $$\vec{E}_{q_0}(P) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{OP}}{\|\vec{OP}\|^3}$$

$$\vec{E}_q(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{AP}}{\|\vec{AP}\|^3}$$

de m̂ norme car $q_0 = -q$, $\|\vec{OP}\| = \|\vec{AP}\|$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{tot}(P) \text{ selon } +\vec{u}}$$

[on peut aussi obtenir la direction de $\vec{E}_{tot}(P)$ par des arguments de sym : le plan médiateur de [O,A] (càd le plan ⊥ à (OA) passant passant par P) est un plan d'antisymétrie passant par P :

$\Rightarrow \vec{E}_{tot}(P) \perp$ à ce plan $\Rightarrow \vec{E}_{tot}(P) // \vec{u}$]

2.2. $\boxed{\vec{E}_{tot}(P)} = \vec{E}_{q_0}(P) + \vec{E}_q(P)$

$$= \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|^3} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AP}\|^3}$$

$$= \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{AP}\right)$$ car $\|\overrightarrow{OP}\| = \|\overrightarrow{AP}\| = a$, $q_0 = -q$

$$= \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\overrightarrow{OA}$$

$$\boxed{= \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{u}}$$ (orienté selon $+\vec{u}$ car $q_0 > 0$)

2.3. $\boxed{V_{tot}(P)} = V_{q_0}(P) + V_q(P)$

$$= \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\|\overrightarrow{OP}\|} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\|\overrightarrow{AP}\|}$$

$$= \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 a}\ \boxed{= 0}$$ (avec convention : $V_{tot} = 0$ à l'∞)

<u>Rq</u> : $V_{tot}(M) = 0 \quad \forall M \in$ plan médiateur de $[O, A]$
car alors $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{AM}\|$ par définition du plan médiateur.