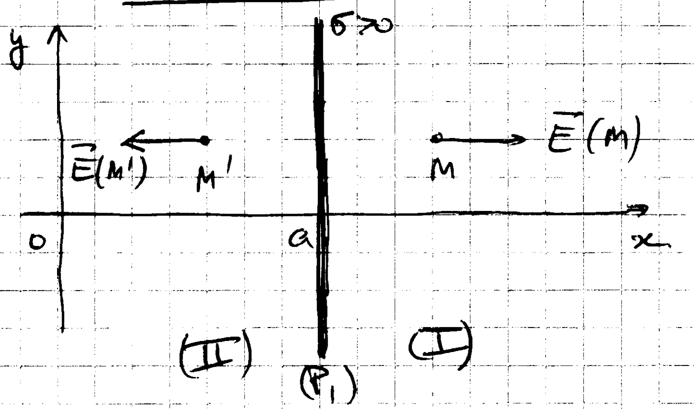
Corrigé de la partie A de l'épreuve Phys. I - 2009

Electrostatique : modèle des plans infinis

I. Plan infini



• D'après l'énoncé, dans région (I) ($x \geq a$) on a :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{e}_x$$

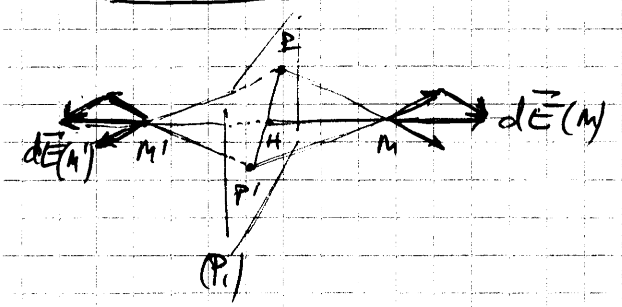
• Dans région (II) ($x \leq a$) :

1ère méthode :

(P1) = plan de sym de la dist. de charges ; $\vec{E}(M) \perp (P_1)$ ds (I) $\Rightarrow$ en M' symétrique de M par rapport à (P1) : $\vec{E}(M') = -\vec{E}(M)$

donc dans la région (II) : $\boxed{\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{e}_x}$

2e méthode



soient P et P' deux pts de (P1) symétriques par rapport à H = projection orthogonale de M et M' sur (P1)
et dS la surface élémentaire autour de ces pts

$$d\vec{E}(M) = \frac{\sigma\,dS}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{PM}+\vec{P'M}}{\|\vec{PM}\|^3} \quad \text{car } \|\vec{PM}\| = \|\vec{P'M}\|$$

or $\vec{PM}+\vec{P'M} = \vec{PH}+\vec{HM}+\vec{P'H}+\vec{HM} = 2\vec{HM}$

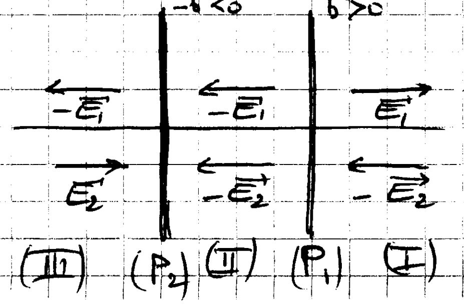
$$\Rightarrow d\vec{E}(M) = \frac{\sigma\,dS}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2\vec{HM}}{\|\vec{PM}\|^3} \quad \text{et de m. : } d\vec{E}(M') = \frac{\sigma\,dS}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2\vec{HM'}}{\|\vec{PM}\|^3} \quad \text{car } \|\vec{PM'}\| = \|\vec{P'M'}\| = \|\vec{PM}\|$$

$$\Rightarrow d\vec{E}(M) = -d\vec{E}(M') \Rightarrow \vec{E}(M) = -\vec{E}(M')$$

donc ds région (II) : $\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{e}_x$

II Deux plans infinis parallèles

1.



D'après le th. de superposition :

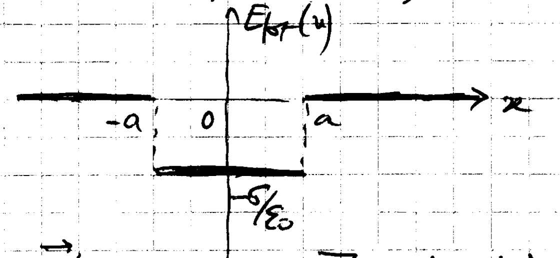
$$\vec{E}_{tot}(M) = \underset{\text{créé par }(P_1)}{\vec{E_1}(M)} + \underset{\text{par }(P_2)}{\vec{E_2}(M)}$$

dans (I) : $\boxed{\vec{E}_{tot}(M) = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\vec{e}_x = \vec{0}}$

dans (II) : $\boxed{\vec{E}_{tot}(M) = \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\vec{e}_x = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_x}$

dans (III) : $\boxed{\vec{E}_{tot}(M) = \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\vec{e}_x = \vec{0}}$

2. $\vec{E}_{tot}(M) = E_{tot}(x)\,\vec{u}_x$



$E_{tot}(x)$ continu partout sauf à la traversée des surfaces chargées (P_1) et (P_2) où il subit une discontinuité finie, bien égale à σ/ε_0.

3. $\vec{E}_{tot}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V_{tot}(M)$

$\Leftrightarrow dV_{tot} = -\vec{E}_{tot}(M)\cdot d\overrightarrow{OM} = -E_{tot}(x)\,dx$

dans (I) : $dV_{tot} = 0 \Rightarrow V_{tot}(x) = C_1$

dans (II) : $dV_{tot} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}dx \Rightarrow V_{tot}(x) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}x + C_2$ $\qquad (C_1, C_2, C_3 = \text{cte})$

dans (III) : $dV_{tot} = 0 \Rightarrow V_{tot}(x) = C_3$

or $V_{tot}(x=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

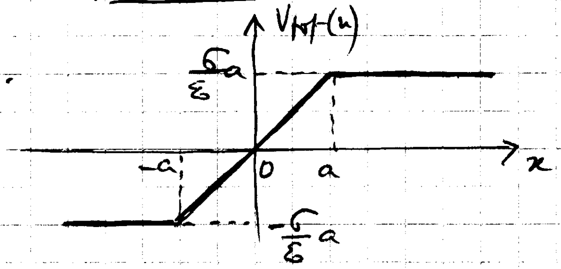
$V_{tot}(x)$ continu en $x = +a \Rightarrow C_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}a$

$x = -a \Rightarrow C_3 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a$

donc

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{dans (I)} : V_{tot}(x) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}a \\ \text{dans (II)} : V_{tot}(x) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}x \\ \text{dans (III)} : V_{tot}(x) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a. \end{array}}$$

4.



$V_{tot}(x)$ bien continu partout

$V_{tot}(0) = 0$