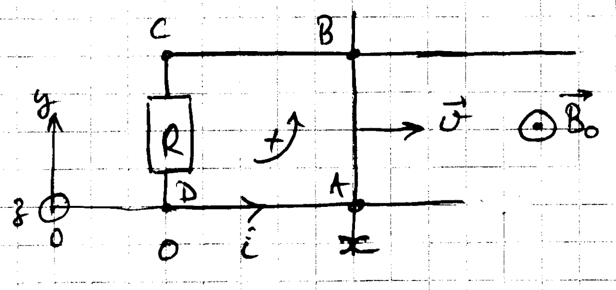
Corrigé de la partie A de l'épreuve Phys. I - 2005

Electromagnétisme : rails de Laplace

I. Cadre horizontal ds un chp magn. uniforme et cst



1. $\boxed{\Phi} = \iint_{ABCD} \vec{B_0}.\vec{dS} = \iint_{ABCD} B_0 \vec{e_z}.dS\,\vec{e_z}$ (d'après le sens + (sens i) indiqué fig. 1)

$= B_0 S_{ABCD} = \boxed{B_0 \ell x}$

2. Dans la barre, les électrons (qui sont les porteurs de charge dans les métaux) se déplacent à $\vec{v}$ de $\vec{B_0}$

$\Rightarrow$ subissent la force de Lorentz : $\vec{F}_{Lo} = -e\vec{v}\wedge\vec{B_0} = \underline{ev B_0 \vec{e_y}}$

c'est cette force qui met les e⁻ en mvt et induit un courant (c'est l'induction de Lorentz : cadre mobile ds un chp $\vec{B}$ stationnaire)

on peut re-écrire $\vec{F}_{Lo} = -e\vec{E_m}$ avec $\boxed{\vec{E_m} = \vec{v}\wedge\vec{B_0}}$

↳ tout se passe comme si un champ électrique $\vec{E_m}$, appelé champ électromoteur, mettait en mvt les e⁻.

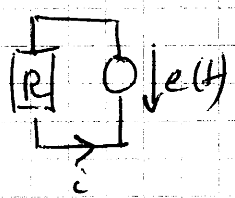
3. La force de Lorentz $\vec{F}_{Lo} = evB_0\vec{e_y}$ entraîne les e⁻ dans le sens +

$\Rightarrow$ le courant induit dans le circuit $\boxed{i<0}$

4. D'après la loi de Faraday, la fem induite dans le circuit vaut :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0\ell\frac{dx}{dt} = -B_0\ell v$$

or le circuit électrique équivalent est :

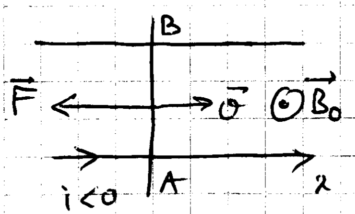


donc $e(t) = Ri(t) \Leftrightarrow \boxed{i(t) = \frac{e(t)}{R} = -\frac{B_0\ell v}{R}}$ (bien <0 !)

[on aurait pu calculer la fem induite $e(t)$ par le chp électromoteur $\vec{E_m}$:

$$e(t) = \int_A^B \vec{E_m}.\vec{dl} = \int_A^B (-vB_0)\vec{e_y}.dl\,\vec{e_y} = -vB_0\int_A^B dl = -B_0\ell v \,]$$

5. La barre AB étant parcourue par le courant i, elle est soumise à la force de Laplace :



$$\boxed{\vec{F} = i\int_A^B \vec{dl} \wedge \vec{B_0} \quad \text{avec } \vec{dl} = dl\,\vec{e_y} \text{ d'après sens } + \\ = i\,\vec{AB} \wedge \vec{B_0} = i B_0 l\,\vec{e_x} = -\frac{B_0^2 l^2}{R} v\,\vec{e_x}}$$

$\vec{F}$ s'oppose au déplacement de la barre AB en accord avec la loi de Lenz (le courant induit s'oppose à sa cause càd ici au mvt de la barre)

6. Syst : barre de masse m

Forces : $\vec{F}$, $m\vec{g}$, $\vec{N} = \vec{N_A} + \vec{N_B}$ = résultante des forces de contact exercées par les rails sur la barre $\perp$ aux rails car la barre se déplace sans frottements

Appliquons la 2^e loi de Newton :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N}$$

$$\Leftrightarrow m\frac{dv}{dt}\vec{e_x} = -\frac{B_0^2 l^2}{R} v\,\vec{e_x} + \underbrace{m\vec{g} + \vec{N}}_{\perp \text{ à } \vec{e_x}}$$

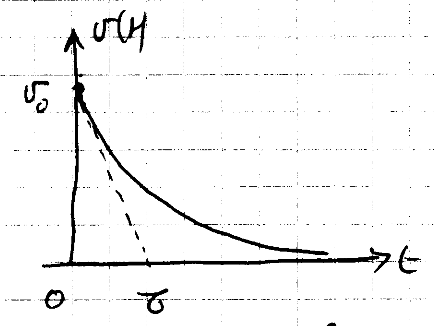
$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{B_0^2 l^2}{mR} v$$

soit $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{B_0^2 l^2}{mR} dt$ que l'on intègre entre $t=0$ et t :

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{v} = -\frac{B_0^2 l^2}{mR}\int_0^t dt \Leftrightarrow \ln\frac{v(t)}{v_0} = -\frac{B_0^2 l^2}{mR} t$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = v_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}\,\vec{e_x} \quad \text{avec } \tau = \frac{mR}{B_0^2 l^2}}$$

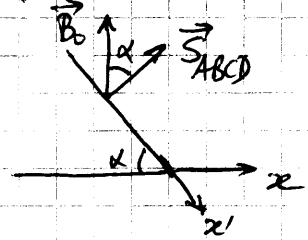
7.



8. On a $\tau = \dfrac{mR}{B_0^2 l^2}$ → diminuer R revient à ralentir la vitesse de la barre plus rapidement

II Cadre incliné dans un chp magn. uniforme et cst

1.

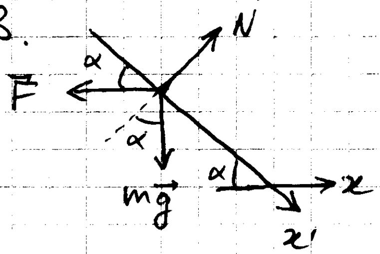


$$\boxed{\phi'} = \iint_{ABCD} \vec{B_0} \cdot d\vec{S} = \vec{B_0} \cdot \vec{S}_{ABCD} = B_0 S_{ABCD} \cos\alpha$$
$$\boxed{= B_0 l \cos\alpha \, x'}$$

2. D'après la loi de Faraday :

$$e'(t) = -\frac{d\phi'}{dt} = -B_0 l \cos\alpha \, v' = R i'(t) \Rightarrow \boxed{i'(t) = -\frac{B_0 l \cos\alpha \, v'}{R}} \; (<0$$

3.



4. $$\boxed{\vec{F}' = i' \int_A^B \vec{dl} \wedge \vec{B_0} = i' \vec{AB} \wedge \vec{B_0} = i' B_0 l \vec{e_x} = -\frac{B_0^2 l^2}{R} \cos\alpha \, v' \vec{e_x}}$$

bien opposée au déplacement de la barre en accord avec loi de Lenz

5. Appliquons la 2e loi de Newton sur la barre :

$$m \frac{dv'}{dt} \vec{e_{x'}} = \vec{F}' + m\vec{g} + \underbrace{\vec{N}}_{\perp \grave{a} \, \vec{e_{x'}}}$$

$$\Rightarrow m \frac{dv'}{dt} = -\|\vec{F}'\| \cos\alpha + mg \sin\alpha$$

soit $$\frac{dv'}{dt} + \frac{B_0^2 l^2}{mR} \cos^2\alpha \, v' = g \sin\alpha$$

ou encore $$\boxed{\frac{dv'}{dt} + \frac{v'}{\tau'} = g \sin\alpha}$$ en posant $\tau' = \frac{mR}{B_0^2 l^2 \cos^2\alpha}$

6. On résout l'équa diff :

- sol. générale sans second membre :

$$v'(t) = C e^{-t/\tau'} \quad (\hat{m} \text{ calcul qu'en } I.6)$$

- sol. particulière avec second membre :

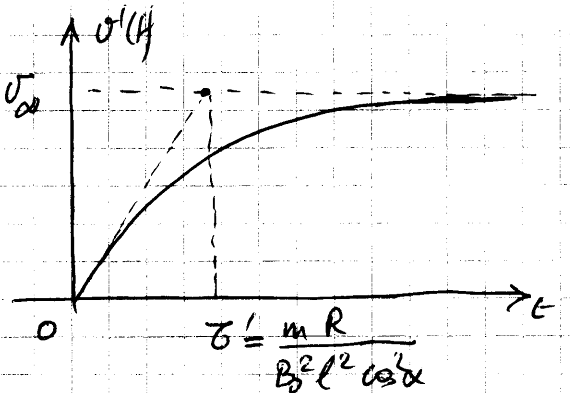
$$v'(t) = \tau' g \sin\alpha$$

$\Rightarrow$ solution : $v'(t) = C e^{-t/\tau'} + \tau' g \sin\alpha$

qui doit vérifier $v'(0) = 0 \Leftrightarrow C = -\tau' g \sin\alpha$

soit $$\boxed{v'(t) = \tau' g \sin\alpha \left(1 - e^{-t/\tau'}\right) = \frac{mRg}{B_0^2 l^2} \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \left(1 - e^{-\frac{B_0^2 l^2}{mR} \cos^2\alpha \, t}\right)}$$

7.



$$v'(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} v_\infty = \tau' g \sin\alpha = \frac{mRg}{B_0^2 \ell^2} \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$v'(0) = 0$$

et $$\left.\frac{dv'}{dt}\right|_0 = -\frac{v'(0)}{\tau} + g\sin\alpha = g\sin\alpha > 0 = \frac{v_\infty}{\tau'}$$

+ la barre va vite, + $\|\vec{F}'\|$ est grande

la barre atteindra une vitesse limite lorsque les composantes des forces $\vec{F}'$ et $m\vec{g}$ sur $\vec{e}_{x'}$ se compensent

c.à.d lorsque :
$$\|\vec{F}'\| \cos\alpha = mg\sin\alpha$$
soit $$\frac{B_0^2 \ell^2}{R} \cos^2\alpha \, v = mg\sin\alpha$$

ce qui correspond à $v = v_\infty = \dfrac{mRg}{B_0^2 \ell^2} \dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$

[La force de Laplace peut être assimilée à une force de frottement fluide $\vec{F}' = -k\vec{v}'$ → la vitesse limite v_∞ est l'analogue de la vitesse limite atteinte par une masse m qui tombe dans un fluide]