

Câble coaxial en régime continu

I. Loi d'Ohm locale

1. La force de freinage modélise les collisions des électrons de conduction avec les atomes du métal.

2. Syst : un électron de masse m

Forces: $\vec{F} = -eE \vec{e}_x$; $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} = -\frac{m}{\tau} v \vec{e}_x$

(on négligera son poids)

2^e loi de Newton: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$

soit sur \vec{e}_x : $\left[\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = -\frac{eE}{m} \right] \quad (1)$

3. On résout cette équ. diff avec second membre:

- on cherche la solution générale de l'éq. sans second membre:

$\frac{dv}{v} = -\frac{dt}{\tau}$ que l'on intègre: $\ln v = -\frac{t}{\tau} + C'$

soit $v(t) = C e^{-t/\tau}$

- puis on cherche une solution particulière de l'éq. avec second membre, par ex. une solution constante $v(t) = C''$

abs: $\frac{C''}{\tau} = -\frac{eE}{m}$ et $v(t) = -\frac{e\tau}{m} E$

- la solution générale de (1) est abs:

$v(t) = C e^{-t/\tau} - \frac{e\tau}{m} E$

avec $v(0) = 0 \Rightarrow C = \frac{e\tau}{m} E$

donc $\vec{v}(t) = \frac{e\tau}{m} (e^{-t/\tau} - 1) \vec{E}$

4. $\vec{v}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \vec{v}_{lim} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}$

5.1 $\underline{v_{lim}} = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 2,5 \times 10^{-14}}{9,1 \times 10^{-31}} \times 0,5 \approx \underline{0,22 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}}$

5.2 $\boxed{v(\vec{s}) = -v \lim (e^{-s} - 1) \approx 0,99 v \lim}$ 2

Le régime permanent s'établit donc très rapidement!

6. On est en régime permanent : $\vec{v} = \vec{v}_{lim} = \mu \vec{E}$

donc $\mu = -\frac{e\tau}{m}$

6.1 On a $\vec{j} = \rho \vec{v} = -N^* e \vec{v}$

↑
densité de charges
volumique

soit ici : $\boxed{\vec{j} = -N^* e \vec{v}_{lim} = \frac{N^* e^2 \tau}{m} \vec{E}}$

On retrouve bien la loi d'Ohm $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ or $\boxed{\sigma = \frac{N^* e^2 \tau}{m}}$

6.2 $\sigma = \frac{6 \times 10^{28} \times 1,6^2 \times 10^{-38} \times 2,5 \times 10^{-14}}{9,1 \times 10^{-31}} \approx \underline{4,22 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}}$

$[\sigma] = \frac{[j]}{[E]} = \frac{I \cdot L^{-2}}{V \cdot L^{-1}} = R^{-1} L^{-1} \Rightarrow$ USI : $\Omega^{-1} m^{-1}$

↑
dimension
d'une tension

↑
dimension
d'une résistance

de plus S. m⁻¹

de S = Siemens, l'USI de la conductance 1/R.

II Résistance d'un conducteur cylindrique d'axe Ox

Ici : conduction selon +e_x ⇒ $\vec{j} = j \vec{e}_x = \sigma \vec{E}$

⇒ $\vec{E} = E \vec{e}_x$ or $E = \frac{j}{\sigma}$

1. $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ Soit tout le section du conducteur

2. On a $\vec{E}(M) = -\text{grad } V(M) = -\frac{dV}{dx} \vec{e}_x$ (car courant unidirectionnel et permanent)

or d'après la loi d'Ohm : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

donc $\boxed{\vec{j} = -\sigma \frac{dV}{dx} \vec{e}_x}$

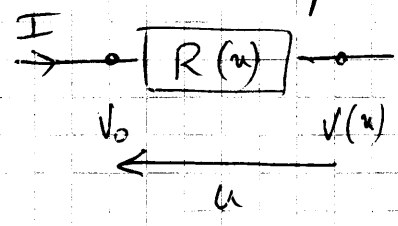
3. $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_S j(u) \vec{e}_x \cdot dS \vec{e}_x = j(u) \iint_S dS = j(u) S$

$= -\sigma S \frac{dV}{dx} \Rightarrow dV = -\frac{I}{\sigma S} dx$

que l'on intègre : $\int_0^x dV = -\frac{I}{\sigma S} \int_0^x du \Rightarrow V(x) - V_0 = -\frac{I}{\sigma S} x$

$$\Rightarrow V(x) = V_0 - \frac{I}{\sigma S} x$$

4. le schéma électrique du conducteur entre 0 et x est:



donc $u = V_0 - V(x) = R(x) I$
 soit $R(x) = \frac{V_0 - V(x)}{I} = \frac{x}{\sigma S}$

[On retrouve bien la résistance d'un fil de long. x, section S, conductivité σ calculée en cours]

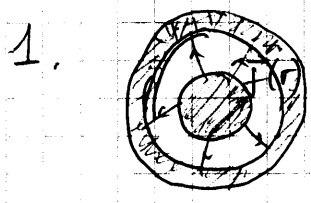
5.1. La résistance du conducteur (A_1) de longueur $x = 1m$ est donc

$$R_1 = \frac{1}{\sigma S_1} = \frac{1}{\sigma \pi r_1^2}$$

5.2 La résistance du conducteur (A_2)

$$R_2 = \frac{1}{\sigma S_2} = \frac{1}{\sigma \pi (r_3^2 - r_1^2)}$$

III Résistance de la gaine d'isolant imparfait comprise entre les 2 armatures



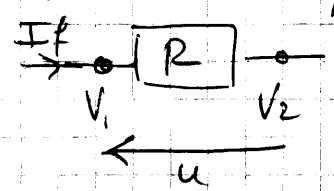
les effets de bords sont négligés (cylindres infinis) et la symétrie est cylindrique \rightarrow le courant est radial : $\vec{j}(M) = j(r) \vec{u}_r$ de la gaine (G)

or d'après la loi d'Ohm : $\vec{j} = \sigma_g \vec{E} = \sigma_g E(r) \vec{u}_r$
 de + $\vec{E} = - \text{grad } V = - \frac{dV}{dr} \vec{u}_r$

$$\Rightarrow j(r) = - \sigma_g \frac{dV(r)}{dr} \text{ de la gaine (G)}$$

2. $I_f = \iint_{S(r)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$ avec $S(r)$ une face cylindrique de l'énoncé
 $= \iint_{S(r)} j(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = j(r) \iint_{S(r)} dS = j(r) 2\pi r l$

3. le schéma électrique pour la gaine (G) s'écrit:



$V_1 > V_2 \rightarrow$ le courant de fuite est selon $+\vec{e}_r$
 donc $u = V_1 - V_2 = R I_f$

D'après III. 1 et 2 : $I_f = -2\pi\sigma_g r l \frac{dV}{dr}$

soit $dV = -\frac{I_f}{2\pi\sigma_g l} \frac{dr}{r}$

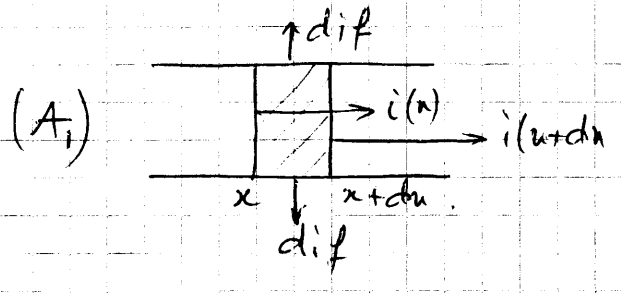
que l'on intègre : $\int_{V_2}^{V_1} dV = -\frac{I_f}{2\pi\sigma_g l} \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r}$

$\Leftrightarrow V_1 - V_2 = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\sigma_g l} I_f$ donc $R = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\sigma_g l}$

[R est bien > 0 et ne dépend que de σ_g et de la géométrie du conducteur]

IV. Etude du câble coaxial

1. considérons une branche du du conducteur (A_1) par ex :



en régime permanent, il n'y a pas d'accumulations de charges

donc $\mathcal{S}q_e = \mathcal{S}q_s + \mathcal{S}q_f$

charges entrant $\rightarrow x$ par dt dt charges sortant $\rightarrow x+du$ par dt dt charges sortant par les côtés par dt dt

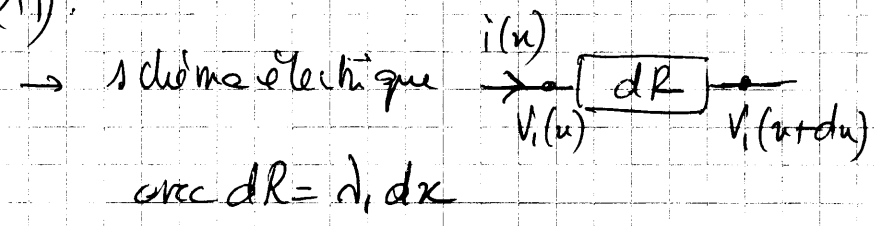
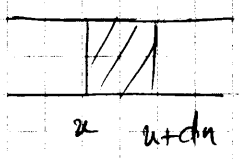
soit $i(x) dt = i(x+du) dt + dif dt$

soit $di = i(x+du) - i(x) = -dif$

[On aurait pu raisonner sur une branche du du conducteur (A_2):

$\mathcal{S}q_e + \mathcal{S}q_f = \mathcal{S}q_s$ soit $i(x+du) + dif = i(x)$

2.1 Dans le conducteur (A_1):



avec $dR = \lambda_1 dx$

donc $V_1(x) - V_1(x+du) = dR i(x) = \lambda_1 i(x) du$

soit $\frac{dV_1}{dx} = -\lambda_1 i(x)$

2.2. De même dans (A_2) avec un courant dans l'autre sens :

$$\boxed{\frac{dV_2}{dx} = \lambda_2 i(x)}$$

2.3. Dans la gaine (G), on reprend les résultats du III. 3 pour une branche dx et un courant de fuite dif :

$$V_1(x) - V_2(x) = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\sigma g} \text{ dif}$$

or d'après IV. 1 $\text{dif} = -di$

$$\Rightarrow \boxed{V_1(x) - V_2(x) = -\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\sigma g} \frac{di}{dx}}$$

3. On pose $\lambda_g = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\sigma g}$ et on écrit l'éq. précédente

$$\frac{dV_1}{dx} - \frac{dV_2}{dx} = -\lambda_g \frac{di}{dx}$$

soit en remplaçant les eq. IV. 2.1 et 2.2 : $-\lambda_1 i(x) - \lambda_2 i(x) = -\lambda_g \frac{di}{dx}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 i}{dx^2} - \omega^2 i(x) = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega^2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_g}} \quad (\text{bien } > 0!)$$

[Attention : λ_1 et λ_2 ne sont pas de même dimension que λ_g !

$$[\lambda_1] = [\lambda_2] = RL^{-1} \quad \text{et} \quad [\lambda_g] = [RL] = RL$$

↑ dimension d'une résistance

$$\text{donc } [\omega^2] = \frac{RL^{-1}}{RL} = L^{-2} : \text{ bien homogène ! }$$

4. La solution générale de cette équation est donnée :

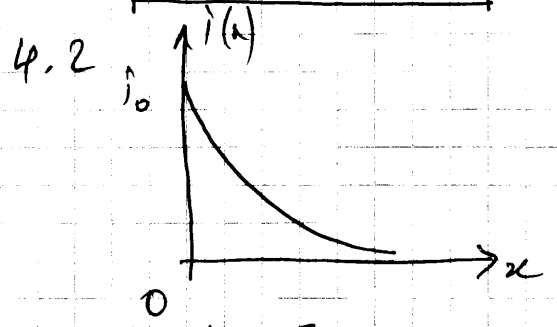
$$i(x) = I_1 e^{-\omega x} + I_2 e^{+\omega x} \quad \text{avec par ex } \boxed{\omega = \sqrt{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_g}}} > 0$$

[On aurait pu obtenir cette solution à partir de l'éq. caractéristique $r^2 - \omega^2 = 0 \Leftrightarrow r = \pm \omega \Rightarrow$ sol. générale : $i(x) = I_1 e^{-\omega x} + I_2 e^{+\omega x}$]

4.1 le fi est supposé infini mais si $I_2 \neq 0$ alors $i(x) \rightarrow \infty$ $x \rightarrow +\infty$ ce qui n'est pas physiquement acceptable $\Rightarrow \boxed{I_2 = 0}$

de + $i(0) = i_0 \Rightarrow I_1 = i_0$

$\Rightarrow i(x) = i_0 e^{-\omega x}$



5.1 D'après IV.2.1 : $dV_1 = -\lambda_1 i(x) dx = -\lambda_1 i_0 e^{-\omega x} dx$
 que l'on intègre : $\int_0^x dV_1 = -\lambda_1 i_0 \int_0^x e^{-\omega x} dx$

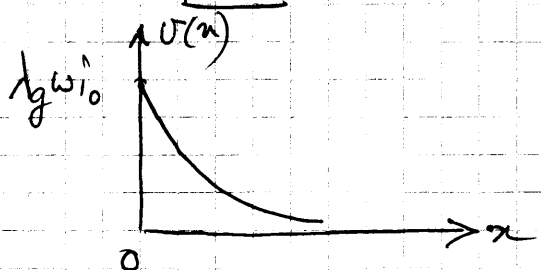
$V_1(x) - V_1 = -\lambda_1 i_0 \left[\frac{e^{-\omega x}}{-\omega} \right]_0^x = \frac{\lambda_1 i_0}{\omega} (e^{-\omega x} - 1)$

$\Rightarrow V_1(x) = V_1 + \frac{\lambda_1 i_0}{\omega} (e^{-\omega x} - 1)$

de m d'après IV.2.2 : $V_2(x) = V_2 - \frac{\lambda_2 i_0}{\omega} (e^{-\omega x} - 1)$

5.2 D'après IV.2.3 :

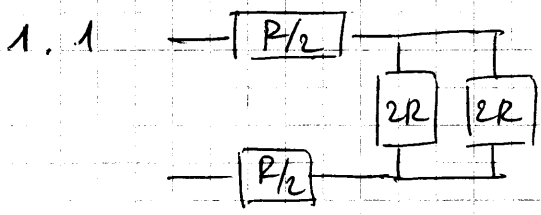
$v(x) = V_1(x) - V_2(x) = -\lambda_g \frac{di}{dx} = \lambda_g \omega i_0 e^{-\omega x}$



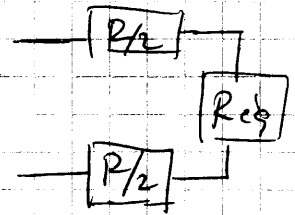
5.3 $R_c = \frac{V_1(0) - V_2(0)}{i(0)} = \frac{v(0)}{i_0} = \lambda_g \omega = \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2) \lambda_g}$

[bien homogène car : $[R_c] = [\lambda_1][\lambda_2]^{1/2} = R^{1/2} L^{-1/2} R^{1/2} L^{1/2} = R$]

IV Modélisation simple du câble

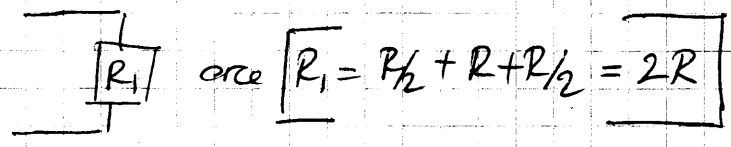


équivalent à



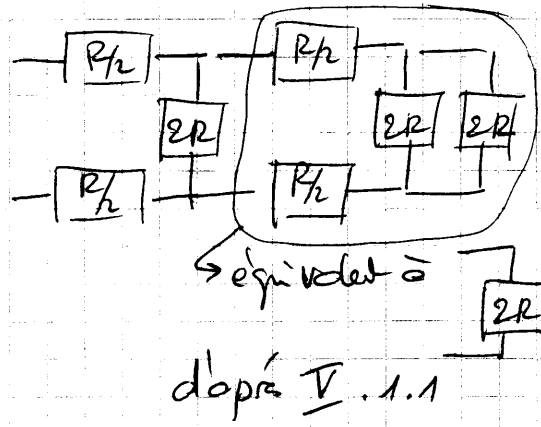
avec $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} = \frac{1}{R}$

équivalent à

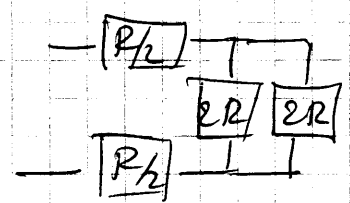


avec $R_1 = P/2 + R + P/2 = 2R$

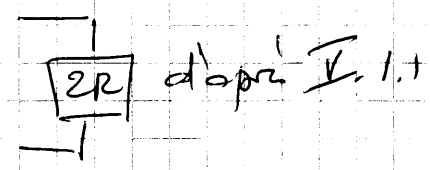
1.2



équivalent à



soit

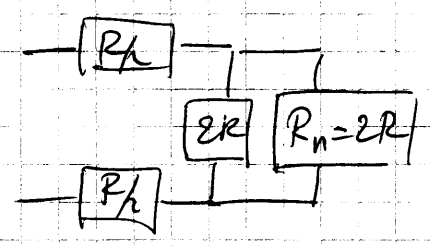
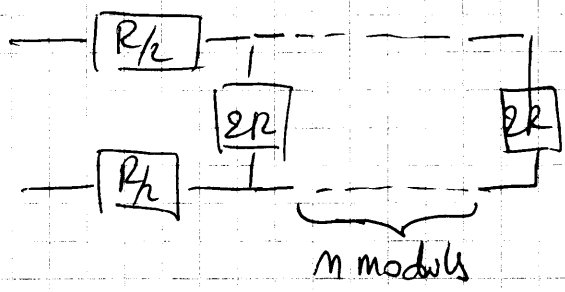


$\Rightarrow R_2 = 2R$

1.3 Démontrons par récurrence que $R_n = 2R$:

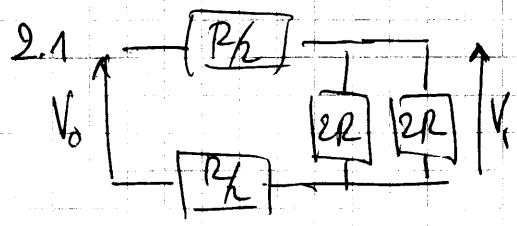
- on a $R_1 = 2R$

- supposons que $R_n = 2R$ et calculons R_{n+1} :

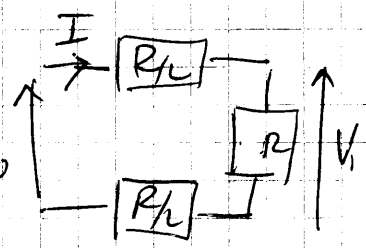


soit \Rightarrow  donc R_{n+1} bien $= 2R$

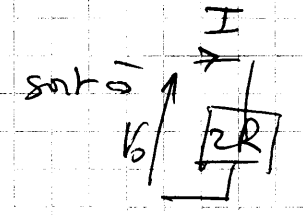
$\Rightarrow R_n = 2R \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$



équivalent à

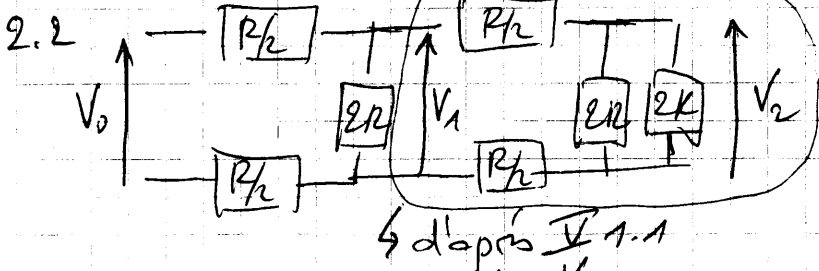


$V_1 = RI$

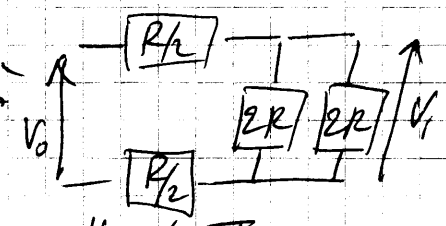


$V_0 = 2RI$

$\Rightarrow V_1 = \frac{V_0}{2}$



équivalent à



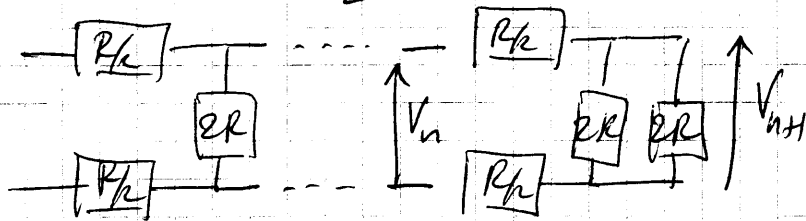
d'après V.1.1
 $V_1 = \frac{V_0}{2}$

donc $V_2 = \frac{V_1}{2} = \frac{V_0}{4}$

2.3 Démontrons par récurrence que $V_n = \frac{V_0}{2^n}$! 8

- on a $V_1 = \frac{V_0}{2}$

- supposons que $V_n = \frac{V_0}{2^n}$ et calculons V_{n+1} :



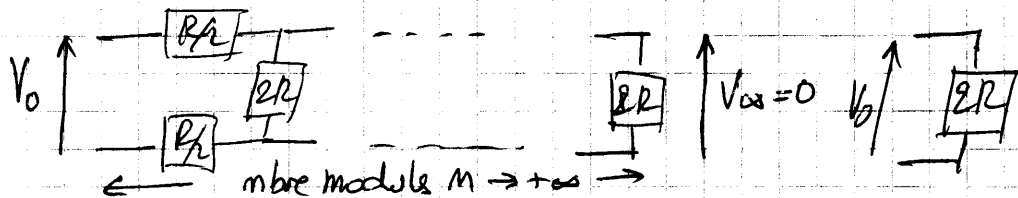
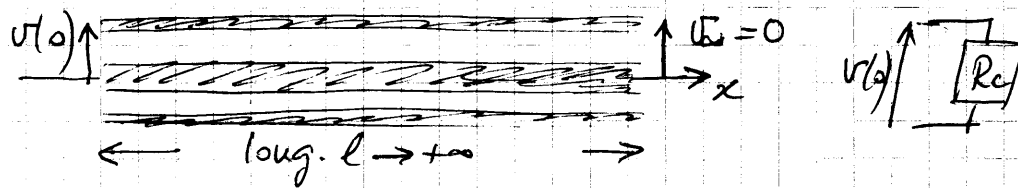
$V_{n+1} = \frac{V_n}{2}$ d'après I.2.1
donc $V_{n+1} = \frac{V_0}{2^{n+1}}$

$\Rightarrow V_n = \frac{V_0}{2^n}$

2.4 $V_n = V_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (suite géométrique de raison $r = \frac{1}{2} < 1$)

donc $V_{\infty} = 0$

Le modèle résistif modélise bien le câble coaxial de long. infini:



- la long. du câble / le nbre de modules n'influent pas sur la résistance
- les différences de potentiels v_x et V_{∞} tendent vers 0 lorsque la long. du câble / le nbre de modules tendent vers $+\infty$.