Corrigé de la partie B de l'épreuve Phys I - 2012

Barreau de combustible nucléaire

1. Le barreau étant considéré de longueur infinie, la diffusion est radiale $\Rightarrow \vec{j}_{th}(r,t) = j_{th}(r,t)\,\vec{e_r}$

soit d'après la loi de Fourier $\vec{j}_{th}(r,t) = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial r}\,\vec{e_r}$

en régime permanent, la température ne dépend pas du temps

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j}_{th}(r) = -\lambda \frac{dT}{dr}\,\vec{e_r}}$$

2. La puissance thermique volumique dégagée par les réactions nucléaires vaut p

Donc la puissance thermique créée à l'intérieur du cylindre $S(r)$ de rayon r et de longueur L vaut :

$$P_{th}(r) = p\,\pi r^2 L$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{th}(r) = p\,\pi r^2} \quad \text{pour } L = 1\,m$$

3. En régime permanent il n'y a pas d'accumulation d'énergie

$\Rightarrow$ la chaleur créée à l'intérieur du cylindre $S(r)$ diffuse à travers sa surface latérale

soit $\boxed{\Phi_{th}(r) = P_{th}(r)}$ (pr $L = 1\,m$)

4. Le flux thermique à travers $S(r)$ s'écrit :

$$\Phi_{th}(r) = \iint_{S(r)} \vec{j}_{th}\cdot d\vec{S} = \iint_{S(r)} j_{th}(r)\,\vec{e_r}\cdot dS\,\vec{e_r} = \iint_{S(r)} j_{th}(r)\,dS = j_{th}(r)\,S(r)$$

↑ car flux sortant

$$\Rightarrow j_{th}(r) = \frac{\Phi_{th}(r)}{S(r)} = \frac{\Phi_{th}(r)}{2\pi r L} = \frac{\Phi_{th}(r)}{2\pi r} = \frac{p\,\pi r^2}{2\pi r} = \frac{p}{2}\,r$$

donc $\boxed{\vec{j}_{th}(r) = \frac{p}{2}\,r\,\vec{e_r}}$

5. D'après la loi de Fourier : $\vec{j}_{th}(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e_r}$

donc $\boxed{\frac{dT}{dr} = -\frac{P}{2\lambda} r}$

[On retrouve bien l'éq. de diffusion 1d avec source en régime permanent : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 = \lambda \Delta T + P$

$+$ car gain d'énergie

avec $\Delta T = \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)$ en coord. cylindriques

$\Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{P}{\lambda} r$

on intègre : $r\frac{dT}{dr} = -\frac{P r^2}{2\lambda} + A$

en prenant $r=0$ on obtient $A=0$

(par symétrie $j_{th}(r=0) = 0 \Rightarrow \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0} = 0$)

$\Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{P}{2\lambda} r$]

6. On intègre : $T(r) = -\frac{P}{4\lambda} r^2 + A$

avec $T(R) = T_0 \Leftrightarrow A = \frac{P}{4\lambda} R^2 + T_0$

$\Rightarrow \boxed{T(r) = \frac{P}{4\lambda}\left(R^2 - r^2\right) + T_0}$ ($T(r)$ bien $> T_0$)

7. $\frac{dT}{dr} = 0$ pour $r = 0$

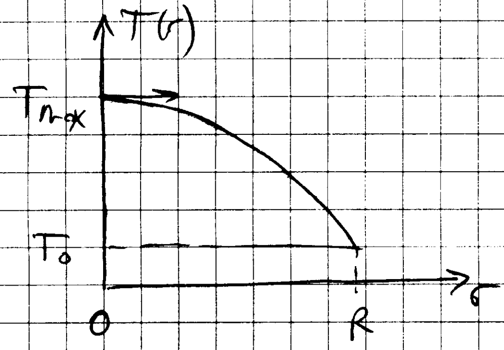
or $T(0) = T_0 + \frac{P}{4\lambda} R^2 > T(R) = T_0$

$\Rightarrow$ la température est maximale en $\boxed{r=0}$ et vaut $\boxed{T_{max} = T_0 + \frac{P}{4\lambda} R^2}$

c'est logique : la température est maximale au point le + loin des bords càd au centre $r=0$

de +, $j_{th}(0) = 0 \Rightarrow \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0} = 0$

8.



T(r) est une parabole concave

9. a $\underline{T_{max}} = 600 + \frac{2\times10^8}{4\times3}\times10^{-4} \simeq \underline{2267 K}$

9. b $\underline{\overline{\Phi_{th}}(r=R)} = \overline{P_{th}}(r=R) = p\pi R^2 \simeq 2\times10^8\times\pi\times10^{-4} \simeq \underline{63 \, kW.m^{-1}}$

9. c Il faut $T_{max} < T_f$

soit $T_0 + \frac{p}{4\lambda}R^2 < T_f \iff R < \boxed{\sqrt{\frac{4\lambda}{p}(T_f - T_0)} = R_{lim}}$

AN $\underline{R_{lim}} = \sqrt{\frac{4\times3}{2\times10^8}(2900 - 600)} \simeq \underline{1{,}2\times10^{-2}\, m}$

9. d on a bien $\underline{R < R_{lim}}$ $\Rightarrow$ le barreau ne risque pas de fondre

[et on a bien $T_{max} < T_f$!]