Partie A – Le phénomène de sédimentation

Aucune connaissance, spécifique à la mécanique des fluides, n'est requise pour traiter ce problème.

Un récipient cylindrique, de section droite d'aire S et d'axe vertical ascendant Oz (vecteur unitaire $\vec{e}_z$), contient un liquide homogène incompressible de masse volumique ρ. L'origine O est choisie au fond du récipient : $z(O) = 0$ (figure **A.1**).
Des macromolécules insolubles, notées $\boldsymbol{M}$, de forme sphérique (rayon R et masse m) et de masse volumique ρ_o (avec $\rho_o > \rho$), sont ajoutées et mélangées au liquide. Au temps initial $t = 0$, la solution, supposée homogène, est abandonnée à elle-même : les macromolécules se déposent, à la vitesse $\vec{v}$, sous l'action des forces de pesanteur (sédimentation).
En plus de leur poids $\vec{P} = -m\,g\,\vec{e}_z$, les particules $\boldsymbol{M}$ sont soumises à deux autres forces : une force de frottement visqueux, dite de Stokes, de la forme $\vec{F}_f = -f\,\vec{v}$ (avec f constante positive) et la poussée d'Archimède $\vec{F}_A = +\dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho\, g\, \vec{e}_z$.

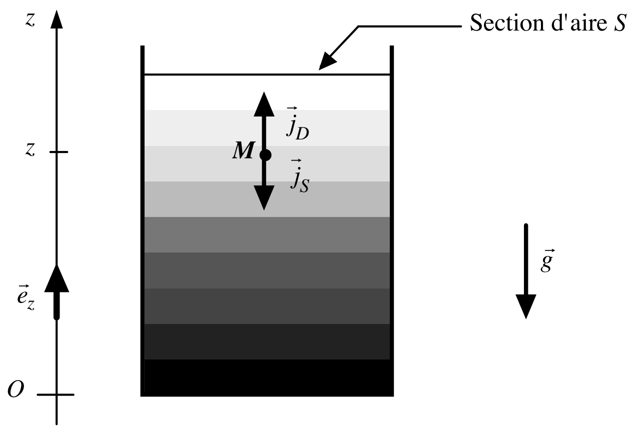

Figure **A.1**

I. Déplacement des particules sous l'action des forces de pesanteur

1. En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique (P.F.D.), écrire la relation entre la vitesse $\vec{v}$ d'une macromolécule et les vecteurs $\vec{P}$, $\vec{F}_f$ et $\vec{F}_A$.

2. Montrer que la poussée d'Archimède peut aussi s'écrire : $\vec{F}_A = +\dfrac{\rho}{\rho_o} m\, g\, \vec{e}_z$.

3. Proposer une équation différentielle du mouvement d'une macromolécule, équation dans laquelle n'apparaissent que la fonction v (vitesse), la variable t et les constantes m, g, f, ρ et ρ_o.

4. En déduire la loi de vitesse $v(t)$ du mouvement de la macromolécule en considérant une vitesse initiale nulle $v_{(t\,=\,0)} = v_o = 0$.

5. Déterminer, en fonction de m, g, f, ρ et ρ_o, l'expression de la valeur absolue $|v_{lim}|$ de la vitesse limite de sédimentation.

6. Soit $N^*(z)$ (particules m^{-3}), la densité volumique de particules $\boldsymbol{M}$ à la cote (ou altitude) z. En déduire, en régime de sédimentation établi, les expressions :

a) du nombre δN_S (positif) de particules qui traversent, en descendant, la section droite S du récipient, pendant la durée élémentaire dt ;

b) du vecteur densité de courant particulaire $\vec{j}_S$ lié à la sédimentation.

II. Diffusion due à l'hétérogénéité de concentration

La sédimentation ayant entraîné une hétérogénéité de la solution, une diffusion unidimensionnelle et unidirectionnelle ascendante (vers le haut) apparaît, soumise à la loi de Fick, de constante de diffusion D (constante positive) et de vecteur densité de courant particulaire $\vec{j}_D$. En tout point M du liquide, cette loi s'écrit :

$$\vec{j}_D = -D\,\overrightarrow{grad}\,N^*(z) = j_D(z)\,\vec{e}_z$$

Soit, en régime établi, δN_D le nombre (positif) de particules qui traversent, par diffusion et en montant, la section droite S du récipient, pendant la durée élémentaire dt.

1. Rappeler la relation qui lie δN_D et $j_D(z)$.

2. En déduire une relation entre δN_D et $\dfrac{dN^*(z)}{dz}$.

III. Équilibre

Il s'agit maintenant, en tenant compte des deux courants (de sédimentation et de diffusion), d'établir la loi $N^*(z)$ à l'équilibre.

1. Donner, en régime stationnaire et permanent, la relation entre les nombres δN_S et δN_D.

2. En déduire une équation différentielle qui relie N^* à la coordonnée de position z, équation dans laquelle n'apparaissent que la fonction N^*, la variable z et les constantes D et $|v_{lim}|$.

3. En déduire la loi $N^*(z)$, avec $N^*_{(z=0)} = N^*_o$.

4. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction $N^*(z)$.

5. Un traitement statistique, selon la théorie de Boltzmann, conduirait à l'expression de la densité volumique particulaire suivante (<u>expression qui n'est pas à redémontrer</u>) :

$$N^*(z) = N^*_o \exp\left(- \frac{m\left(1 - \dfrac{\rho}{\rho_o}\right) g}{k_B\,T}\, z \right).$$

avec k_B constante de Boltzmann et T température absolue. Déduire de ces résultats (§ **A.III.3** et § **A.III.5**) la relation entre les grandeurs D, f, k_B et T.

6. Le coefficient f de la loi de Stokes est lié à la constante de viscosité η du liquide selon l'égalité $f = 6\pi R\eta$. Montrer que D peut s'exprimer en fonction des grandeurs k_B, T, η et R.

IV. Mesures et résultats

Des mesures optiques, à la température T, montrent qu'à la cote $z = z_1 = 4{,}00 \times 10^{-2}$ m, la densité particulaire N^* vaut :

$$N^*(z_1) = \frac{N^*_o}{3}.$$

<u>Données</u> : $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J.K^{-1} ; $T = 298$ K ; $g = 9{,}81$ m.s^{-2} ; $\rho = 1{,}00 \times 10^3$ kg.m^{-3} ;
$\rho_o = 1{,}25 \times 10^3$ kg.m^{-3} ; $\eta = 1{,}00$ Pℓ (avec 1 Pℓ = 1 Pa.s = 1 USI).

1. Calculer la masse m et le rayon R des macromolécules ***M***.

2. En déduire la valeur numérique du coefficient de diffusion D de ces particules.