Partie B

Mesure d'une conductivité thermique

L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct (Ox, Oy, Oz) de base ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$).

Un cylindre circulaire droit, homogène, isotrope et d'axe $z'z$, est limité par deux sections droites, de rayon r, orthogonales à l'axe $z'z$ et séparées approximativement par la distance L.

Une de ses deux extrémités ($z \approx 0$) est chauffée par effet Joule grâce à un résistor, de résistance $R_{él}$, soumis à une tension E constante et parcouru par un courant I. L'autre extrémité ($z \approx L$) est refroidie grâce à une circulation d'eau froide. Grâce à ces sources, les sections terminales sont maintenues à des températures constantes respectives $T(z \approx 0) = T_o$ et $T(z \approx L) = T_L$, avec $T_o > T_L$.

De petits capteurs, insérés dans des cavités creusées dans le matériau, permettent de mesurer la température pour diverses valeurs de z.

Ce barreau, constitué d'un matériau de conductivité thermique λ constante et uniforme, est supposé parfaitement calorifugé sur toute sa surface. La conduction thermique, envisagée en régime permanent et stationnaire, est unidimensionnelle, unidirectionnelle et parallèle à l'axe $z'z$: les surfaces isothermes sont planes et perpendiculaires à cet axe (figure **B.1**).

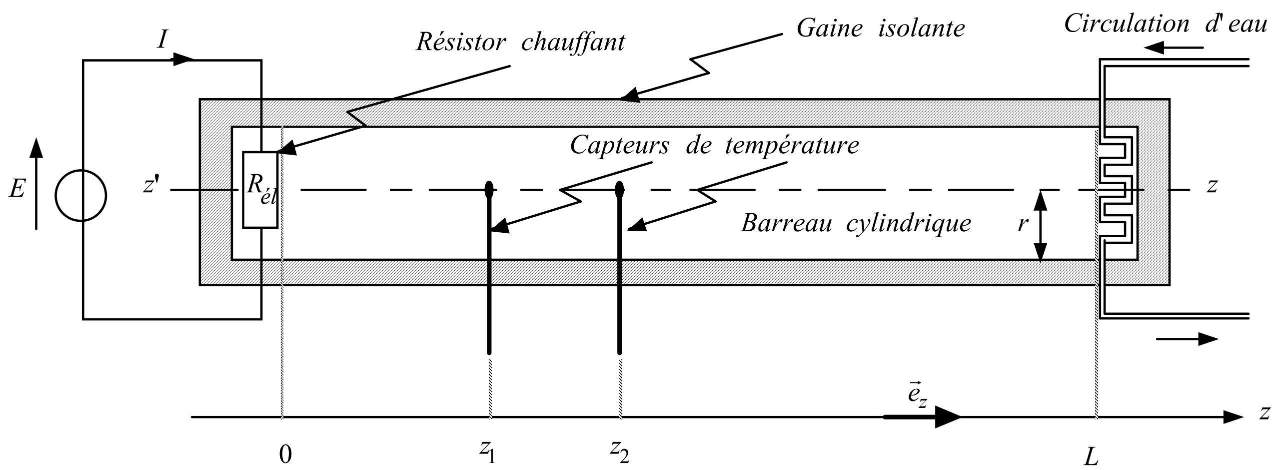

Figure **B.1**

Soit $\Phi_{th}(z)$ le flux thermique (ou puissance) qui traverse, à l'abscisse z, une section droite, d'aire S. Le vecteur associé au flux est le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_{th}$, lié à la température par la loi de Fourier : $\vec{j}_{th}(x,y,z,t) = -\lambda\ \overrightarrow{\text{grad}}\ T(x,y,z,t)$, loi qui s'écrit, compte tenu des hypothèses énoncées plus haut :

$$\vec{j}_{th}(z) = j_{th}(z)\ \vec{e}_z = -\lambda \frac{dT(z)}{dz}\ \vec{e}_z$$

I. Généralités

1. Rappeler les unités des grandeurs $\vec{j}_{th}$ et λ.
2. Rappeler la relation qui lie $\Phi_{th}(z)$ et $j_{th}(z)$.
3. Déterminer, en fonction de E et $R_{él}$, la puissance électrique $P_{él}$ reçue par le résistor et dégradée en puissance thermique (effet Joule).
4. Sachant que cette puissance est intégralement transmise au barreau, approximativement à l'abscisse $z \approx 0$, exprimer le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_{th}(z \approx 0)$ en fonction des grandeurs E, $R_{él}$ et r (rayon du cylindre).
5. Il n'y a aucune accumulation d'énergie en tout point du matériau. Montrer que le bilan thermique sur un petit élément volumique de matériau, d'aire S et d'épaisseur dz, situé entre les abscisses z et $z+dz$, permet de montrer que la température $T(z)$ est une fonction affine de z, à l'intérieur du barreau.

*Ce dernier résultat (§ **B.I.5.**) sera admis pour la suite de l'exercice*

6. En déduire que le vecteur densité de courant thermique et le gradient de température sont uniformes en tout point du barreau tel que : $0 \leq z \leq L$.

II. Mesure de la conductivité thermique

1. Les capteurs permettent de repérer les températures suivantes : $T(z_1) = T_1$ et $T(z_2) = T_2$.
   a) Exprimer le gradient de température en fonction de T_1, T_2, z_1 et z_2.
   b) Tracer l'allure de la courbe représentative de cette fonction $T(z)$.
2. *Application numérique* : $E = 6{,}0$ V ; $R_{él} = 10\ \Omega$; $r = 1{,}0 \times 10^{-2}$ m ; $L = 4{,}0 \times 10^{-1}$ m ;
   $z_1 = 1{,}0 \times 10^{-1}$ m ; $z_2 = 2{,}0 \times 10^{-1}$ m ; $T_1 = 330$ K ; $T_2 = 320$ K.
   a) Calculer la conductivité thermique λ du matériau.
   b) Évaluer les températures approximativement attendues aux extrémités : T_o en $z \approx 0$ et T_L en $z \approx L$.
   c) Déterminer la puissance thermique évacuée par l'eau de refroidissement au cours de la traversée du serpentin, en $z \approx L$.
   d) La résistance thermique R_{th} du barreau est définie par l'égalité $(T_o - T_L) = R_{th}\ \Phi_{th}$. Calculer la résistance thermique linéique r_{th} du barreau (résistance thermique par unité de longueur).