Partie C : Chauffage d'un four à micro-ondes

1) ϕ flux de $\vec{j}$ à travers une sphère de rayon r : $\phi(r) = \iint_{sphère} \vec{j} \cdot \vec{dS}$

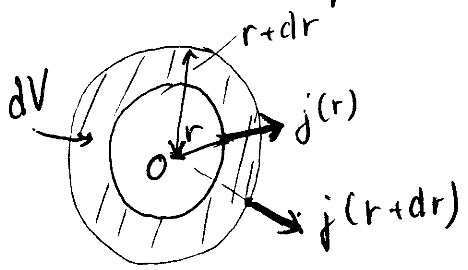
or en tout point P de la sphère $\vec{j}(P) \parallel \vec{dS}(P)$ donc $\vec{j} \cdot \vec{dS} = j(r)\, dS$

donc $\phi(r) = j(r) \iint dS = \underline{4\pi r^2 j(r)}$

2) $dV = \underbrace{4\pi r^2}_{\text{surface de la sphère de rayon } r} dr$

3) Puissance reçue par la brioche dans le volume dV : $dP_{th} = p\, dV = \underline{\underline{4\pi r^2 dr\, p}}$

4) Bilan des flux thermiques par dV



$$\begin{cases} \text{flux entrant dans dV} : \phi(r) = 4\pi r^2 j(r) \\ \text{flux sortant de dV} : \phi(r+dr) = 4\pi (r+dr)^2 j(r+dr) \end{cases}$$

En régime permanent la température de la brioche ne varie pas dans le temps, donc la brioche n'absorbe (ni ne rejette) de l'énergie

Le bilan énergétique par dV s'écrit donc

$$\phi(r+dr) = \phi(r) + dP_{th}$$

soit $4\pi (r+dr)^2 j(r+dr) = 4\pi r^2 j(r) + 4\pi r^2 dr\, p$

or $dj = j(r+dr) - j(r)$ car j ne dépend que de r

donc $\cancel{4\pi r^2 j(r)} + \underset{\substack{1^{\text{er}}\text{ ordre} \\ \text{en } dr, dj}}{8\pi r\, dr\, j(r)} + \underset{2^{\text{e}}\text{ ordre}}{4\pi (dr)^2 j(r)} + \underset{3^{\text{e}}\text{ ordre}}{4\pi (dr)^2 dj} + \underset{1^{\text{er}}\text{ ordre}}{4\pi r^2 dj} + \underset{2^{\text{e}}\text{ ordre}}{8\pi r\, dr\, dj}$

$= \cancel{4\pi r^2 j(r)} + 4\pi r^2 dr\, p$

Dans la limite $dr \to 0$, $dj \to 0$ on ne garde que les termes à l'ordre le plus bas (ici 1er ordre)

donc $8\cancel{\pi} r\, dr\, j(r) + 4 \cancel{\pi r^2}\, dj = 4 \cancel{\pi r^2}\, dr\, p$

$2\, dr\, j(r) + r\, dj = r\, p\, dr \quad \Rightarrow \quad 2 j(r) + r \frac{dj}{dr} = r p$

d'après Fourier $j(r) = -\lambda \dfrac{dT}{dr}$

$$\boxed{2\frac{dT}{dr} + r\frac{d^2T}{dr^2} = -\frac{rP}{\lambda}}$$

soit $u(r) = \dfrac{dT}{dr}$: u est solution de $2u(r) + r\,u'(r) = -\dfrac{P}{\lambda} r$ (*)

éq du 1 ordre avec 2$^{\text{d}}$ membre.

solution de l'éq. homogène $2u + ru' = 0 \Rightarrow \dfrac{du}{u} = -2\dfrac{dr}{r}$

$$\Rightarrow \ln u = -2\ln r + \ln \underset{C^{te}}{K_2}$$

$$\Rightarrow u = \frac{K_2}{r^2}$$

solution particulière de (*) : $u(r) = \underset{C^{te}}{\alpha} r$ soit $2\alpha \cancel{r} + \cancel{r}\alpha = -\dfrac{P}{\lambda}\cancel{r}$

$$\alpha = -\frac{P}{3\lambda}$$

donc $u(r) = \boxed{\dfrac{dT}{dr} = \underbrace{-\dfrac{P}{3\lambda}}_{= K_1} r + \dfrac{K_2}{r^2}}$ K_2 constante

6) En régime stationnaire l'énergie qui sort de la brioche pendant dt est égale à l'énergie dégagée par les ondes dans la brioche

donc $\phi(R) = P_{th}$ et $P_{th} = \dfrac{4}{3}\pi \underbrace{R^3}_{\text{volume brioche}} P$

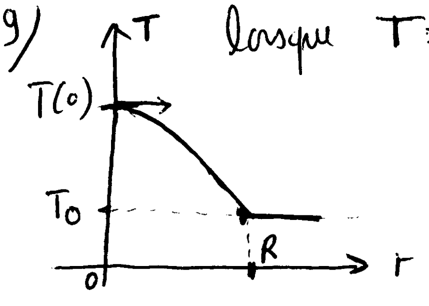
7) Or $\phi(R) = 4\pi R^2 j(R) = -4\pi R^2 \lambda \left(\dfrac{dT}{dr}\right)(R) = \dfrac{4}{3}\pi R^3 P$

soit $K_1 R + K_2 \dfrac{1}{R^2} = -\dfrac{RP}{3\lambda} \Rightarrow K_2 = -\dfrac{P}{3\lambda}R^3 + \dfrac{P}{3\lambda}R^3 = 0$

Rmq si $K_2 \neq 0$, on aurait $\lim_{r\to 0} T = +\infty$: impossible

donc $\dfrac{dT}{dr} = -\dfrac{P}{3\lambda} r \Rightarrow T(r) = -\dfrac{P}{6\lambda} r^2 + C^{te}$

9) lorsque $T = R$: $T(R) = T_0 \Rightarrow \boxed{T(r) = T_0 - \dfrac{P}{6\lambda}\left(r^2 - R^2\right)}$



10°) T est max au centre de la Brioche en $r = 0$: $T(0) = T_0 + \dfrac{PR^2}{6\lambda}$

$\Rightarrow$ c'est au centre que la brioche carbonise.