Partie B
Conduction thermique

Un barreau cylindrique, noté ($\mathcal{B}$), homogène, d'axe $x'x$, de masse volumique ρ, de longueur L et de section d'aire S, présente une conductivité thermique λ constante. Sa paroi latérale est parfaitement calorifugée par un isolant de capacité thermique négligeable. Les extrémités de ($\mathcal{B}$) sont maintenues, grâce à deux sources, à des températures T_1 ($x = 0$) et T_2 ($x = L$) constantes. Le matériau est le siège d'une conduction thermique (ou diffusion de chaleur) unidimensionnelle (variable x) et unidirectionnelle (transport axial d'énergie, parallèlement au vecteur $\vec{e}_x$). Le régime est permanent et stationnaire : la température T à l'intérieur du barreau ne dépend que de l'abscisse x. Soit $\Phi_{th} = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot \overrightarrow{dS}$, le flux (ou puissance) thermique (unité : W) qui traverse une section d'aire S. Le vecteur associé à ce flux est le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_{th}$, lié à la température T par la loi de Fourier qui s'écrit ici :

$$\vec{j}_{th}(x) = -\lambda \frac{dT(x)}{dx} \vec{e}_x = j_{th}(x)\, \vec{e}_x .$$

Rappel d'un outil mathématique : $\qquad f(x+dx) - f(x) = \left(\dfrac{df(x)}{dx} \right) dx$.

1. Les températures des sections terminales sont différentes : T_1 ($x = 0$) > T_2 ($x = L$). Aucune énergie thermique n'est créée dans le matériau (absence de réaction nucléaire, absence d'effet Joule, etc.).

a) Rappeler le sens de la diffusion thermique à l'intérieur du barreau.

b) Sans terme de création, le flux thermique Φ se conserve de section en section. Proposer un bilan de puissance thermique (entrée et sortie), en raisonnant sur une tranche élémentaire de matériau d'épaisseur dx, comprise entre les abscisses x et $x+dx$ (figure **B.1**).

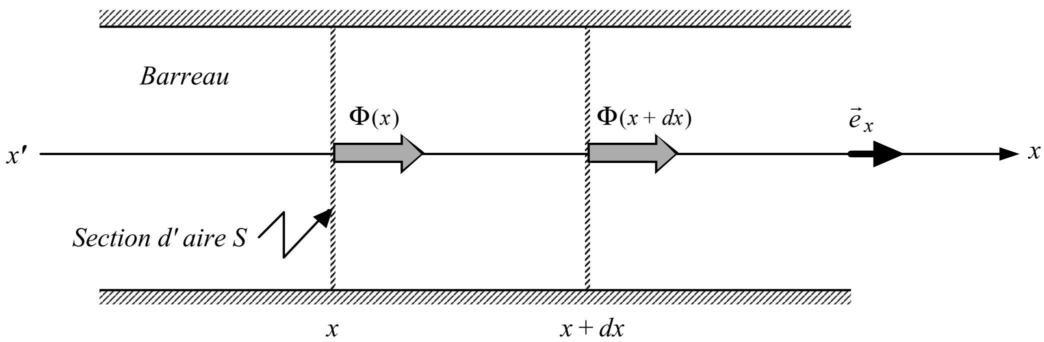

Figure **B.1**

c) En déduire l'équation différentielle (du second ordre) vérifiée par $T(x)$.

d) Etablir la fonction de distribution $T(x)$ des températures à l'intérieur du barreau.

e) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $T(x)$, pour $0 \le x \le L$.

f) Par analogie avec la loi d'Ohm $V_A - V_B = R_{él}\, I$, la résistance thermique R_{th} peut être définie par $T_1 - T_2 = R_{th}\, \Phi$. Exprimer R_{th} en fonction des données de l'énoncé.

2. Le barreau contient maintenant une substance radioactive qui libère, uniformément dans tout le matériau conducteur, une puissance thermique volumique p_v (unité : W m^{-3}). Le régime est permanent et stationnaire.

a) Exprimer la puissance thermique dP, engendrée par radioactivité dans la tranche élémentaire d'épaisseur dx, en fonction des grandeurs p_v, S et dx.

b) Effectuer, sur cette tranche élémentaire, un bilan de puissance thermique (entrée, création et sortie) (figure **B.2**).

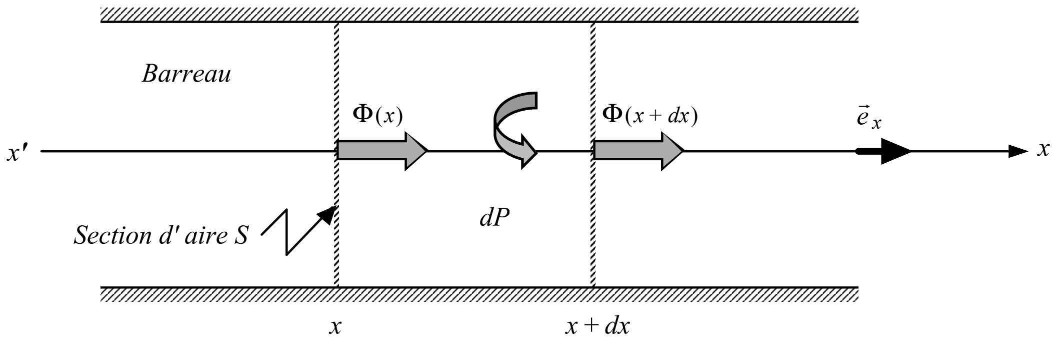

Figure **B.2**

c) En déduire l'équation différentielle (du second ordre) vérifiée par $T(x)$.

d) Etablir la fonction de distribution $T(x)$ des températures à l'intérieur du barreau.

e) Les températures des sections terminales sont maintenues identiques : $T_1 = T_2 = T_o$.

e.1 Déterminer la valeur x_m de x pour laquelle $T(x_m) = T_m$ est maximale.

e.2 Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $T(x)$, pour $0 \leq x \leq L$.

e.3 Préciser le(s) sens de la diffusion thermique à l'intérieur du barreau.

e.4 Application numérique : $L = 2{,}00$ m ; $\lambda = 2{,}50$ W m^{-1} K^{-1} ;
$p_v = 5{,}00 \times 10^1$ W m^{-3} ; $T_o = 300$ K.

Calculer la température T_m.

3. L'élément radioactif responsable de la création de chaleur dans le barreau est l'uranium (^{235}U), de masse molaire $M(U)$ et de titre massique (ou pourcentage massique) w dans le matériau. Ce radioisotope libère, à l'intérieur de ($\mathcal{B}$), la quantité de chaleur q à chaque désintégration d'un noyau. La variation dN du nombre total $N(t)$ de noyaux instables dans le barreau, pendant la durée élémentaire dt, s'écrit : $dN = -\,k\,N(t)\,dt$, avec k constante (positive) de réaction radioactive.

a) Rappeler le signe de l'élément différentiel dN.

b) Ecrire la relation simple qui existe entre l'activité radioactive $A(t)$ (nombre total, positif, de désintégrations par seconde) du barreau et la dérivée dN/dt.

c) En déduire l'expression de $A(t)$ en fonction de k et $N(t)$.

d) Déterminer le nombre N_v d'atomes d'uranium présents dans l'unité de volume (1 m^3) de matière dont est constitué le barreau, en fonction de w, ρ, $M(U)$ et N_A (nombre d'Avogadro).

e) Ecrire l'expression qui lie les grandeurs p_v, k, N_v et q.

f) Application numérique : $\rho = 1{,}80 \times 10^4$ kg m^{-3} ; $\lambda = 2{,}50$ W m^{-1} K^{-1} ; $L = 2{,}00$ m ;
$w = 0{,}750$ (= 75 %) ; $M(U) = 2{,}35 \times 10^{-1}$ kg mol^{-1} ;
$k = 3{,}50 \times 10^{-17}$ s^{-1} ; $p_v = 5{,}00 \times 10^1$ W m^{-3} ; $T_o = 300$ K ;
$\mathcal{N}_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ mol^{-1}.

Calculer la chaleur q.