Corrigé de la partie D de l'épreuve Phys. I – 2006

Diffusion de matière

[le pb est à symétrie sphérique, donc il faut prendre les coord. sphériques ; les 2 composantes du $\vec{grad}\, N^*$ données dans l'énoncé sont en fait les composantes sur $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ en coord sphériques..]

I. Généralités sur la diffusion

1. Diffusion à symétrie radiale → $N^*(r,t)$ pour $r \geq R$

Donc d'après la loi de Fick :

$$\boxed{\vec{j}(r,t) = -D\, \vec{grad}\, N^*(r,t) = -D \frac{\partial N^*}{\partial r} \vec{e_r}}$$

2. $\boxed{\phi(r,t)} = \iint_S \vec{j}(r,t) \cdot \vec{dS}$ où S = sphère centre O, rayon $r \geq R$

$$= \iint_S j(r,t)\, dS = j(r,t) \iint_S dS$$

$$= \boxed{j(r,t)\, 4\pi r^2} = \boxed{-D \frac{\partial N^*}{\partial r} 4\pi r^2}$$

3. $\underline{[D]} = \frac{[j]}{[\frac{\partial N^*}{\partial r}]} = \frac{[\phi/S]}{[N^*/r]} = \frac{T^{-1}L^{-2}}{L^{-3}L^{-1}} = \underline{L^2 T^{-1}} \rightarrow$ l'USI de D : $\boxed{m^2.s^{-1}}$

II. Diffusion des neutrons dans un milieu non absorbant

→ pas d'accumulation de particules en un pt donné : $N^*(r, \cancel{t})$

1. En régime stationnaire et dans un milieu non absorbant (càd sans source) on a $\boxed{\phi(r,t) = cte}$

[d'après l'éq. de conservation du nbre de part en régime permanent :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\mathrm{div}\, \vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{j} = \text{chp à flux conservatif}$$
$$\Rightarrow \phi = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = cte\ \forall S \quad]$$

2. $\boxed{\phi(r,t)}$ = nbre de neutrons traversant la surface d'une sphère de rayon r / u. de tps

= Σ / u. de tps (car φ = cte)

$$= \boxed{N_0\, 4\pi R^2}$$

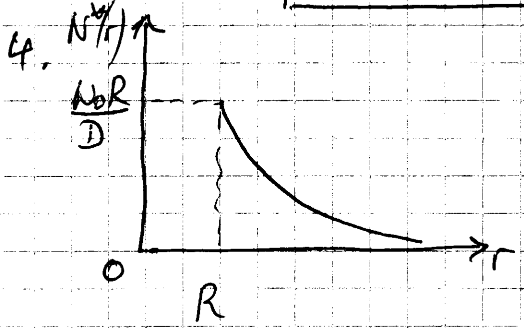
3. Donc d'après I. 1 et 2 : $N_0\, \cancel{4\pi} R^2 = j(r)\, \cancel{4\pi} r^2$; $j(r) = -D \frac{dN^*}{dr}$ $\Big\}$ $\underline{\frac{dN^*}{dr} = -\frac{N_0 R^2}{D r^2}}$

$$\Rightarrow N^*(r) = \frac{N_0 R^2}{D r} + A$$

or $N^*(r) \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0 \quad \Rightarrow A = 0$

on a donc $\boxed{N^*(r) = \dfrac{N_0 R^2}{D r}}$ pour $r \geq R$.

4.



[On obtient bien la m chose en partant de l'éq. de diffusion :

en régime permanent $\frac{\partial N^*}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Delta N^* = 0$

soit en sphériques avec $N^*(r)$: $\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dN^*}{dr}\right) = 0 \Rightarrow r^2 \frac{dN^*}{dr} = A'$

$\therefore$ or $\phi(R) = j(R) 4\pi R^2 = -D \left.\frac{dN^*}{dr}\right|_{r=R} 4\pi R^2 = N_0 4\pi R^2$

càd $\left.\frac{dN^*}{dr}\right|_{r=R} = -\frac{N_0}{D} \Rightarrow A' = -\frac{N_0 R^2}{D}$ et $\frac{dN^*}{dr} = -\frac{N_0 R^2}{D r^2}$]

II Absorption des neutrons par réaction nucléaire

Le milieu (M) absorbe C neutrons / u de vol et de tps.

En régime stationnaire $N^*(r, \cancel{t})$ (pas d'accumulation de particules en un pt donné)

mais $\phi(r)$ ici à cause des réactions nucléaires qui absorbent des neutrons (= source)

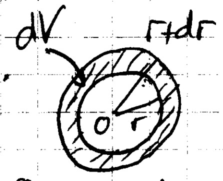
[$\hookrightarrow$ vient de l'éq. de conservation du nbre de part. avec source

$$\frac{\partial N^*}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{j} - C = 0 \text{ en régime stationnaire}$$

$\llcorner$ car absorption or $C > 0$.

$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{j} = -C$: $\vec{j}$ n'est plus un chp à flux conservatif !]

1.

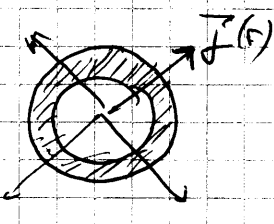


$\boxed{dV = 4\pi r^2 dr}$

[que l'on peut retrouver : $dV = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} dr \, r d\theta \, r \sin\theta \, d\varphi$

$= r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi r^2 dr$]

2. En régime stationnaire, le nbre de neutron ds le vol. dV est constant



donc pendant l'intervalle de temps dt :

le nbre de neutrons entrant ds dV en r

= ——— sortant de dV en r+dr

\+ ——— absorbés ds dV par des réactions nucléaires.

soit $\boxed{\delta N_e = \delta N_s + \delta N_c}$

3. $\delta N_e = \phi(r)\,dt$ (les neutrons entrant ds dV en r)

$\delta N_s = \phi(r+dr)\,dt$ (——— sortant de ——— r+dr)

$\delta N_c = C\, 4\pi r^2 dr\, dt$

donc $\delta N_e = \delta N_s + \delta N_c \Leftrightarrow \phi(r)\cancel{dt} = \phi(r+dr)\cancel{dt} + C\, 4\pi r^2 dr\, \cancel{dt}$

or $\phi(r+dr) - \phi(r) = d\phi$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{d\phi}{dr} = -C\, 4\pi r^2}$

or $\phi(r) = j(r)\, 4\pi r^2 = -D \dfrac{dN^*}{dr} 4\pi r^2$

$\Rightarrow \dfrac{d\phi}{dr} = -4\pi D \dfrac{d}{dr}\left(r^2 \dfrac{dN^*}{dr}\right)$

donc $\boxed{\dfrac{d}{dr}\left(r^2 \dfrac{dN^*}{dr}\right) = \dfrac{C}{D} r^2}$ pour $r \geq R$

[Attention : $\phi(r) = j(r)\, 4\pi r^2$

donc $\phi(r+dr) = j(r+dr)\, 4\pi (r+dr)^2$!

donc $\phi(r+dr) - \phi(r) = (j(r) + dj)\, 4\pi (r^2 + 2r\,dr + \cancel{dr^2}) - j(r)\, 4\pi r^2$

ordre 2

$= 4\pi (r^2 dj + 2r\, j(r)\, dr + \cancel{dj\, 2r\,dr})$

$= 4\pi\, d(r^2 j(r))$

$= d(j(r)\, 4\pi r^2)$ bien égal à $d\phi$!!]

[On retrouve bien la m̂ équa diff pr $N^*(r)$ en partant de l'éq. de diffusion : $\dfrac{\partial N^*}{\partial t} = D \Delta N^* - C$

car absorption et C > 0

= 0 en régime stationnaire

$\Rightarrow$ en sphériques avec $N^*(r)$: $D \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2 \dfrac{dN^*}{dr}\right) = C$

soit $\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dN^*}{dr}\right) = \dfrac{C}{D} r^2$]

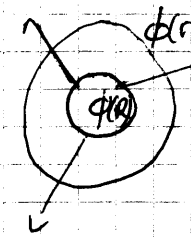
4. On intègre l'éq. bilan des flux :

$$\frac{d\phi}{dr} = -C\, 4\pi r^2 \Rightarrow \phi(r) = -C\,\frac{4}{3}\pi r^3 + A$$

or $\phi(R) = N_0\, 4\pi R^2 \Rightarrow A = N_0\, 4\pi R^2 + C\,\frac{4}{3}\pi R^3$

donc $\boxed{\phi(R) = \frac{4}{3}\pi C\,(R^3 - r^3) + 4\pi N_0 R^2}$ (on retrouve bien le résultat du II.3 pr $C=0$)

[On aurait pu obtenir $\phi(r)$ directement :



en régime stationnaire, on a :

\- sans source (càd sans capture) : $\phi(r) = \phi(R) = N_0 4\pi R^2$

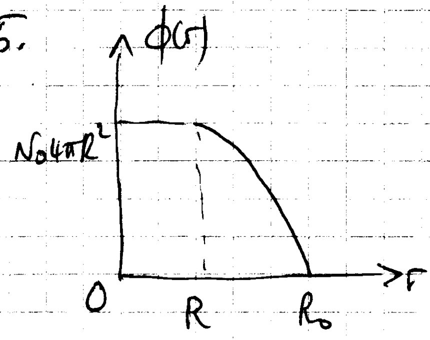
\- avec source (— avec —) :

$$\phi(r) = \phi(R) - \text{nbre de neutrons absorbés entre } r=R \text{ et } r$$

$$= \phi(R) - \int_R^r C\, 4\pi r^2 dr$$

$$= N_0 4\pi R^2 - C\,\frac{4}{3}\pi\,(r^3 - R^3)$$]

5.



$\phi(R_0) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{C}{3}(R^3 - R_0^3) + N_0 R^2 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{R_0 = R\left(1 + \dfrac{3N_0}{CR}\right)^{1/3}}$

Rq : + C est grand, càd + le taux de capture est grand, + R_0 est proche de R.

6. <u>R_0 ne dépend pas de D</u>

En régime stationnaire $\phi(r)$ ne dépend pas de la vitesse à laquelle les particules diffusent (càd de D)

$\phi(r) = \underset{\text{dépend de } N_0 \text{ et } R}{\phi(R)} + \text{nbre de neutrons absorbé entre } r=R \text{ et } r$ (dépend de C)

$\Rightarrow$ <u>$\phi(r)$ ne dépend que de R, N_0 et C</u>.