Concours L2-Deug 2005

Physique II : partie A

À propos du stockage des déchets nucléaires

Le stockage des déchets radioactifs constitue un problème majeur dans la poursuite du programme nucléaire des nations. De nombreuses solutions sont à l'étude. Une d'entre elles a pour but d'enfouir, dans la roche, ces résidus inutilisables en les incorporant au béton. On se propose, ici, d'étudier un des problèmes posés par cette méthode : le contrôle de la production de chaleur.

*Les parties **A** et **B** sont totalement indépendantes.*

Partie A

Diffusion thermique

L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct (Ox, Oy, Oz) de base $\left(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$.

Une paroi d'épaisseur ℓ, comprise entre deux plans infinis et parallèles, perpendiculaires à l'axe Ox, est constituée d'un matériau de conductivité thermique λ, de masse volumique μ et de coefficient thermique massique isochore c_v. Les grandeurs λ, μ et c_v sont constantes, et les dimensions de la paroi sont invariables.

La face $\mathbf{F_1}$, d'abscisse $x = 0$, est maintenue à la température T_1 constante. La seconde face $\mathbf{F_2}$, située en $x = \ell$, se trouve à une température $T_{(x=\ell)}$. Soit Φ_u le flux thermique algébrique (ou flux d'énergie interne U, sans travail) qui traverse une section droite, d'aire S, orthogonale à l'axe Ox et orientée par le vecteur unitaire $\vec{e}_x$. Le vecteur associé au flux est le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_u$, lié à la température par la loi de Fourier : $\vec{j}_u = -\lambda \overrightarrow{grad}\, T$. Le système étant unidimensionnel, on peut écrire :

$$\vec{j}_u = j_{u,x}(x,t)\,\vec{e}_x = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\,\vec{e}_x .$$

I. Conduction thermique simple dans le matériau

La face $\mathbf{F_2}$ est maintenue à la température T_2 (avec $T_1 > T_2$, et T_1 et T_2 constantes). On considère la tranche cylindrique de section droite, d'aire S, comprise entre les plans d'abscisse x et $x + dx$ (figure **1**).

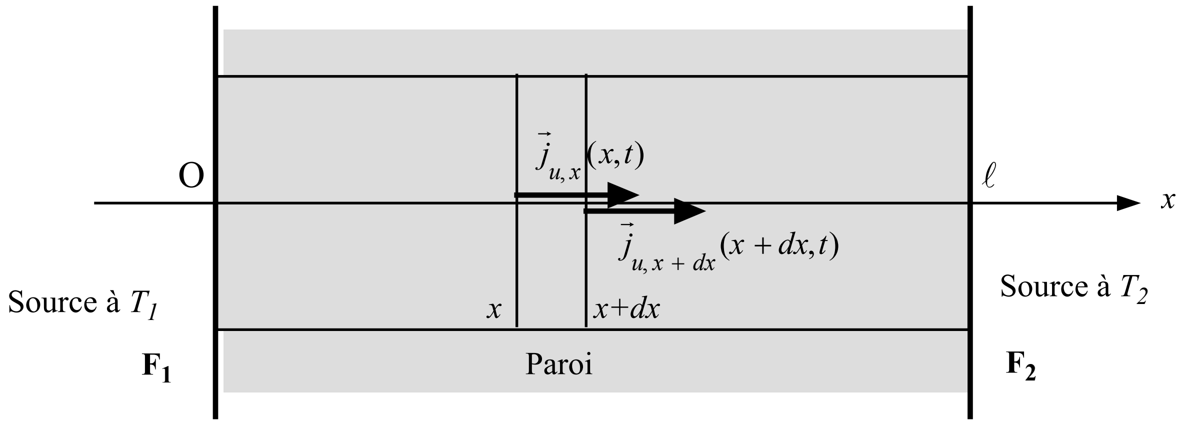

Figure **1**

1. En identifiant la puissance thermique reçue $dP\left(=\delta^2 Q/dt\right)$ par la tranche élémentaire et le bilan des flux thermiques (entrant et sortant), montrer que l'équation différentielle de la diffusion thermique, à laquelle satisfait la température, se met sous la forme :

$$\textbf{(1)} \qquad \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = A \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

2. Exprimer la constante A, en fonction de λ, μ et c_v.
3. Que devient l'expression **(1)**, en régime stationnaire ?
4. En déduire l'expression de $T(x)$.
5. Donner, en fonction de λ, ℓ, S, T_1 et T_2, l'expression du flux de chaleur Φ_u à travers une section droite de surface S, orientée par le vecteur unitaire $\vec{e}_x$.
6. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $T(x)$.

II. Diffusion thermique dans un combustible nucléaire

Le matériau est maintenant un mélange, supposé homogène, de résidus radioactifs et de béton. Il se dégage, dans ce matériau, une puissance thermique volumique σ_u, créée par les réactions nucléaires résiduelles qui s'y produisent et répartie uniformément dans tout le volume. La paroi est donc soumise à la création interne de chaleur et à l'écoulement thermique. Les faces $\mathbf{F_1}$ et $\mathbf{F_2}$ sont toujours maintenues aux températures respectives T_1 et T_2. Le système est stationnaire et la température $T(x)$ ne dépend que de l'abscisse x.

1. Effectuer le bilan d'énergie dans cette tranche d'épaisseur dx.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$.
3. En déduire l'expression de $T(x)$.
4. Établir, pour une section S d'aire unité (1 m^2), les expressions des flux thermiques algébriques $\Phi_{u,o}$ et $\Phi_{u,\ell}$ mis en jeu, respectivement, en $x = 0$ et en $x = \ell$.
5. Que devient, toujours en régime stationnaire, la puissance thermique créée au sein du mur de béton ?
6. Pour des raisons de sécurité, chacune des faces $\mathbf{F_1}$ et $\mathbf{F_2}$ est protégée par une plaque métallique collée contre elle, d'épaisseur et de résistance thermique négligeables. Ce coffrage est arrosé en permanence avec de l'eau froide et on considère que ces plaques métalliques, ainsi que les faces qu'elles protègent, sont à la température T_o de l'eau ($T_1 = T_2 = T_o$).

6.1. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $T(x)$.
6.2. Déterminer l'abscisse $x = x_m$ pour laquelle la température $T(x_m) = T_m$ est maximale.
6.3. Donner, en fonction de σ_u, ℓ, λ et T_o, l'expression de la température T_m.
6.4. Quelle est l'influence de l'épaisseur ℓ sur la température maximale T_m ?
6.5. *Application numérique* $\quad \sigma_u = 3{,}00\,\mathrm{kW\,m^{-3}}$; $\ell = 0{,}50$ m ;
$\lambda = 1{,}20\ \mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$; $T_o = 290$ K.

6.5.1. Calculer, en $x = \ell$, le flux $\Phi_{u,\ell}$ à travers une section droite S, d'aire unité (1 m^2).

6.5.2. Calculer T_m.

6.5.3. Pour des raisons de sécurité, la température de 500 K est une température limite qui, à l'intérieur du matériau, ne doit pas être dépassée. Calculer l'épaisseur maximale ℓ_m de la paroi de béton.

III. Refroidissement par échange radioconvectif

La face $\mathbf{F_1}$ est maintenue à la température T_o. Seule la plaque métallique, en contact avec la face $\mathbf{F_2}$, n'est plus arrosée, et les échanges superficiels ne s'y font plus que par rayonnement et convection avec l'air extérieur qui est à la température T_{ext} constante (figure **2**).

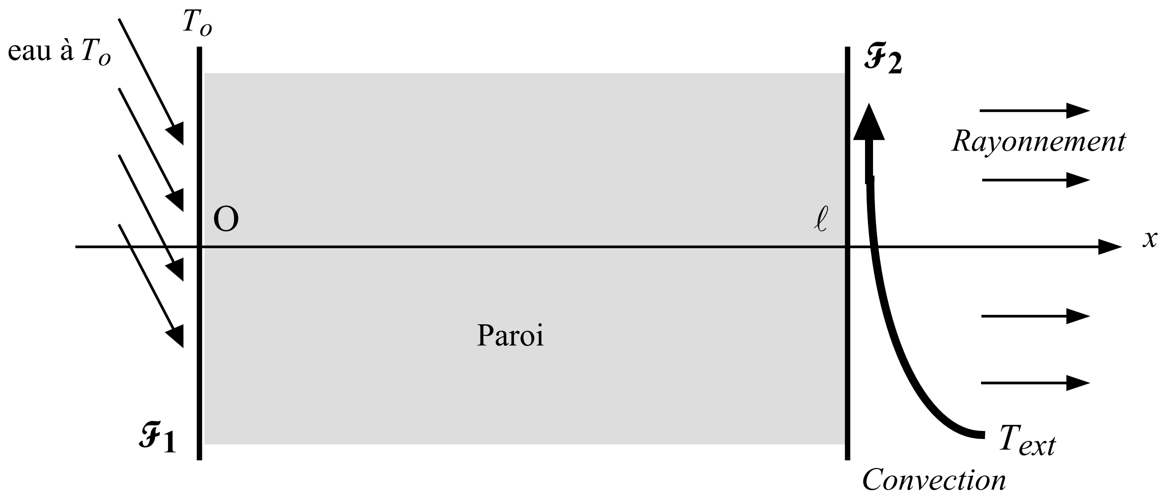

Figure **2**

On définit, dans ce cas, un coefficient d'échange radioconvectif h_{rc} qui tient compte des deux modes de transfert thermique. On admet que le flux thermique total, à travers une surface S de la face $\mathbf{F_2}$, s'écrit : $\Phi_{rc} = h_{rc}\, S\left(T_{(x=\ell)} - T_{ext}\right)$, avec h_{rc} constante positive.

1. Quelle relation simple existe-t-il, en $x = \ell$ et pour une même surface S, entre le flux de conduction, noté $\Phi'_{u,\ell}$, et le flux radioconvectif Φ_{rc} ?

2. Déterminer l'expression de $T(x)$.

3. *Application numérique* $\sigma_u = 3{,}00\ \mathrm{kW\,m^{-3}}$; $\ell = 0{,}50\,\mathrm{m}$; $h_{rc} = 5{,}0\ \mathrm{W\,m^{-2}K^{-1}}$;
$\lambda = 1{,}20\ \mathrm{W\,m^{-1}K^{-1}}$; $T_o = T_{ext} = 290$ K.

3.1. Calculer le flux $\Phi'_{u,\ell}$, en $x = \ell$, pour une section droite d'aire unité (1 m^2).

3.2. Comparer la valeur des flux $\Phi_{u,\ell}$, (calculé au **§.A.II.6**) et $\Phi'_{u,\ell}$, (calculé au **§.A.III.3**). Que peut-on en conclure ?

3.3. Donner la limite de la valeur $T(x = \ell)$ lorsque le coefficient d'échange radioconvectif h_{rc} tend vers l'infini.