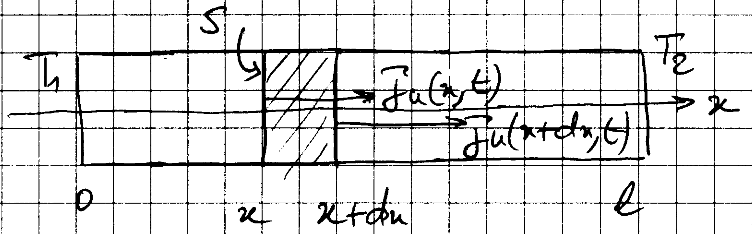
$\boxed{\text{Corrigé de la partie A de l'épreuve Phys II - 2005}}$

Diffusion thermique

I. Conduction thermique simple dans le matériau



conduction 1d

$T_1 > T_2 \Rightarrow$ conduction thermique selon $+\vec{e}_x$

1. La chaleur reçue par la tranche dx pendant l'intervalle de temps dt est : $\delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s$

chaleur entrant à x pdt dt — chaleur sortant à $x+dx$ pdt dt

$$= \phi_u(x,t)\,dt - \phi_u(x+dx,t)\,dt$$

or $\phi_u(x,t) = \iint_S \vec{j}_u \cdot \vec{dS} = \iint_S j_u(x,t)\,\vec{e}_x \cdot dS\,\vec{e}_x = j_u(x,t)\iint dS = j_u(x,t)\,S$

donc $\delta Q = j_u(x,t)\,S\,dt - j_u(x+dx,t)\,dt$

$$= -\frac{\partial j_u}{\partial x}\,S\,dx\,dt$$

mais on a aussi : $\delta Q = m\,c_v\,dT$ (par déf. de chaleur massique)

$$= \mu S\,dx\,c_v\left(T(x,t+dt) - T(x,t)\right)$$

$$= \mu c_v \frac{\partial T}{\partial t}\,S\,dx\,dt$$

$\Rightarrow$ on a $\mu c_v \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\dfrac{\partial j_u}{\partial x}$ (c'est l'éq. de conservation de l'énergie)

d'après la loi de Fourier : $\vec{j}_u(x,t) = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}\,\vec{e}_x$

donc $\dfrac{\partial j_u}{\partial x} = -\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

et $\mu c_v \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ (c'est l'éq. de diffusion 1d!) = l'éq. de la chaleur

que l'on peut réécrire : $\boxed{\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\lambda}{\mu c_v}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$

2. $\boxed{A = \frac{\lambda}{\mu c_V}}$ = diffusivité thermique (en $m^2 \cdot s^{-1}$)

3. En régime stationnaire, $T(x, \cancel{t}) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = 0$

donc l'éq. de diffusion devient : $\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} = 0}$

4. On intègre deux fois : $T(x) = Ax + B$

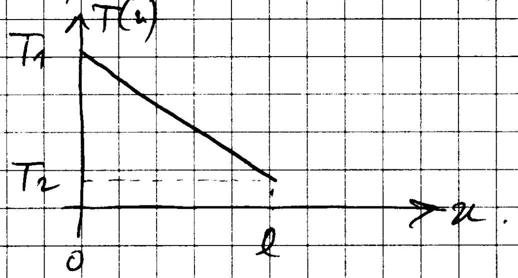
avec $T(0) = T_1 \Rightarrow B = T_1$

$T(\ell) = T_2 \Rightarrow A\ell + T_1 = T_2 \Leftrightarrow A = \frac{T_2 - T_1}{\ell}$

$\Rightarrow \boxed{T(x) = \frac{T_2 - T_1}{\ell} x + T_1}$

5. $\boxed{\phi_u = j_u(x) S = -\lambda S \frac{dT}{dx} = -\lambda S \frac{T_2 - T_1}{\ell}}$

6. $T(x)$ est une droite de pente $\frac{T_2 - T_1}{\ell} < 0$



II Diffusion thermique dans un combustible nucléaire

On a ici une diffusion thermique en présence d'une source nucléaire de puissance volumique σ_u.

1. En régime stationnaire il n'y a pas d'accumulation d'énergie donc pour une tranche dx pendant dt on a :

$$\delta Q_e + \delta Q_{nucl} = \delta Q_s$$

avec δQ_{nucl} = chaleur apportée au vol. $d\tau = S dx$ par les réactions nucléaires pdt dt $= \sigma_u \, d\tau \, dt$

soit $\phi_u(x) dt + \sigma_u S dx dt = \phi_u(x+dx) dt$

$j_u(x) S dt + \sigma_u S dx dt = \phi_u(x+dx) dt$

soit $dj_u = j_u(x+dx) - j_u(x) = \sigma_u dx \Rightarrow \boxed{\frac{dj_u}{dx} = \sigma_u}$

2. On a $j_u(x) = -\lambda \dfrac{dT}{dx} \Rightarrow \dfrac{dj_u}{dx} = -\lambda \dfrac{d^2T}{dx^2}$

donc $\boxed{\dfrac{d^2T}{dx^2} = -\dfrac{\sigma_u}{\lambda}}$

[on retrouve bien l'éq. de diffusion 1d en régime permanent avec une source : $\mu c_v \dfrac{\partial T}{\partial t} = 0 = \lambda \Delta T + \sigma_u \Rightarrow \Delta T = \dfrac{d^2T}{dx^2} = -\dfrac{\sigma_u}{\lambda}$]

3. On intègre deux fois : $T(x) = -\dfrac{\sigma_u}{2\lambda} x^2 + Ax + B$

avec $T(0) = T_1 \Rightarrow B = T_1$

$T(\ell) = T_2 \Rightarrow -\dfrac{\sigma_u}{2\lambda} \ell^2 + A\ell + T_1 = T_2 \Leftrightarrow A = \dfrac{T_2 - T_1}{\ell} + \dfrac{\sigma_u}{2\lambda} \ell$

$$\Rightarrow \boxed{T(x) = -\frac{\sigma_u}{2\lambda} x^2 + \left(\frac{T_2 - T_1}{\ell} + \frac{\sigma_u}{2\lambda} \ell\right) x + T_1}$$

(on retrouve bien I.4 pour $\sigma_u = 0$)

4. $\phi_u(x) = j_u(x) S = -\lambda S \dfrac{dT}{dx} = -\lambda S \left(-\dfrac{\sigma_u}{\lambda} x + \dfrac{T_2 - T_1}{\ell} + \dfrac{\sigma_u}{2\lambda} \ell\right)$

$= \left[\sigma_u \left(x - \dfrac{\ell}{2}\right) + \dfrac{\lambda}{\ell} (T_1 - T_2)\right] S$

soit pour une surface $S = 1 m^2$

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_{u,0} &= \frac{\phi_u(0)}{S} = \frac{\lambda}{\ell}(T_1 - T_2) - \frac{\sigma_u \ell}{2} \\ \phi_{u,\ell} &= \frac{\phi_u(\ell)}{S} = \frac{\lambda}{\ell}(T_1 - T_2) + \frac{\sigma_u \ell}{2} \end{aligned}}$$

[pour $\sigma_u = 0$ on a bien $\phi_{u,0} = \phi_{u,\ell}$ car ϕ_u = cte en régime permanent sans source]

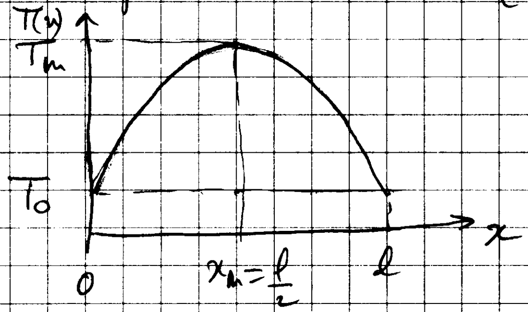
5. La puissance thermique créée dans le mur de béton (par les réactions nucléaires) est égale à $\sigma_u \ell$ pour une surface $S = 1 m^2$.
On constate que <u>la moitié</u> de cette puissance <u>est évacuée par la face F_1</u> (correspondant au terme $-\dfrac{\sigma_u \ell}{2} < 0$ dans $\phi_{u,0}$ càd à un flux selon $-\vec{e}_x$ sortant du mur) tandis que <u>l'autre moitié est évacuée par la face F_2</u> (correspondant au terme $+\dfrac{\sigma_u \ell}{2} > 0$ dans $\phi_{u,\ell}$ càd à un flux selon $+\vec{e}_x$ sortant).

C'est logique car le matériau étant homogène, la chaleur apportée par les réactions nucléaires sera également répartie dans le mur et donc également évacuée par les deux faces.

6. Ici $T_1 = T_2 = T_0$ → on n'a plus de conduction thermique
le flux thermique ici est dû à l'évacuation de la chaleur créée par les réactions nucléaires.

6.1 $T(x) = -\frac{\sigma_n}{2\lambda} x^2 + \frac{\sigma_n}{2\lambda} l x + T_0 = -\frac{\sigma_u}{2\lambda} x(x-l) + T_0$

↳ parabole concave (terme en $x^2 < 0$)



c'est logique car le matériau est homogène et $T_1 = T_2 = T_0$
⇒ T_m au pt le + loin des 2 faces
càd en $x_m = \frac{l}{2}$

6.2 Par symétrie T_m en $\boxed{x_m = \frac{l}{2}}$

6.3. $\boxed{T_m = T\left(\frac{l}{2}\right) = T_0 + \frac{\sigma_n}{8\lambda} l^2}$ (bien $> T_0$)

6.4. T_m croît en l^2 → l'épaisseur l influe fortement sur T_m

6.5.1 $\Phi_{u,l} = \frac{\sigma_n l}{2}$ (d'après II.4 avec $T_1 = T_2$)
$\simeq \frac{3 \times 10^3 \times 1/2}{2} \simeq 750\ W.m^{-2}$

[ici pr $T_1 = T_2 = T_0$ on a $\Phi_{u,l} = \frac{\sigma_u l}{2} = -\Phi_{0,l}$: la chaleur créée dans le mur est évacuée également par les 2 faces F_1 et F_2]

6.5.2 $T_m = 290 + \frac{3 \times 10^3}{8 \times 1,2} \times \frac{1}{4} \simeq 368K$ (bien $> T_0 = 290K$)

6.5.3 Il faut $T_m < T_{lim} = 500K$
soit $T_0 + \frac{\sigma_n}{8\lambda} l^2 < T_{lim} \Leftrightarrow l < \boxed{l_m = \sqrt{\frac{8\lambda}{\sigma_u}(T_{lim} - T_0)}}$

AN: $l_m = \sqrt{\frac{8 \times 1,2}{3 \times 10^3}(500 - 290)} \simeq 0,82\ m$

III Refroidissement par échange radioconvectif

Maintenant les échanges thermiques se font par convection et par rayonnement sur la face F_2 avec l'air extérieur à T_{ext}.

1. En régime permanent il n'y a pas d'accumulation d'énergie
$\Rightarrow$ toute l'énergie arrivant par conduction en $x=\ell$ doit être évacuée par convection et rayonnement

$$\Rightarrow \boxed{\phi'_{u,\ell} = \phi_{rc}}$$

2. $T(x)$ dans le mur est donnée par II.3 avec $T_1 = T_0$ et $T_2 = T(x=\ell)$

soit $$\boxed{T(x) = -\frac{\sigma_u}{2\lambda}x^2 + \left(\frac{T(x=\ell)-T_0}{\ell} + \frac{\sigma_u \ell}{2\lambda}\right)x + T_0}$$

et $T(x=\ell)$ est déterminé par $\phi'_{u,\ell} = \phi_{rc}$

~~soit~~ avec $\phi'_{u,\ell} = \lambda\frac{T_0 - T(x=\ell)}{\ell} + \frac{\sigma_u \ell}{2}$ (d'après II.4 avec $T_1 = T_0$, $T_2 = T(x=\ell)$)

donc $$\lambda\frac{T_0 - T(x=\ell)}{\ell} + \frac{\sigma_u\ell}{2} = h_{rc}\,(\underbrace{T(x=\ell) - T_{ext}}_{T(x=\ell)-T_0+T_0-T_{ext}})$$ pour $S = 1\,m^2$

$$\left(T(x=\ell)-T_0\right)\left(h_{rc}+\frac{\lambda}{\ell}\right) = \frac{\sigma_u\ell}{2} + h_{rc}(T_{ext}-T_0)$$

soit $$\boxed{T(x=\ell)} = T_0 + \frac{\frac{\sigma_u\ell}{2} + h_{rc}(T_{ext}-T_0)}{h_{rc}+\frac{\lambda}{\ell}}$$

$$= \boxed{\frac{T_0 + \frac{\sigma_u\ell^2}{2\lambda} + \frac{h_{rc}\ell}{\lambda}T_{ext}}{1+\frac{h_{rc}\ell}{\lambda}}}$$

3. Ici $T_{ext} = T_0$ $\Rightarrow$ $$\boxed{T(x=\ell) = T_0 + \frac{\sigma_u \ell^2}{2(\lambda + h_{rc}\ell)}}$$

3.1 et $$\boxed{\phi'_{u,\ell}} = \lambda\frac{T_0 - T(x=\ell)}{\ell} + \frac{\sigma_u\ell}{2} = -\frac{\lambda\sigma_u\ell}{2(\lambda+h_{rc}\ell)} + \frac{\sigma_u\ell}{2}$$

$$= \frac{\sigma_u\ell}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+h_{rc}\ell}\right) = \boxed{\frac{\sigma_u h_{rc}\ell^2}{2(\lambda+h_{rc}\ell)}}$$ pr $S = 1\,m^2$

AN $$\underline{\phi'_{u,\ell}} = \frac{3\times10^3\times5\times1/4}{2(1{,}2+5\times\frac{1}{2})} \simeq \underline{507\ W.m^{-2}}$$

3.2 $\underline{\phi'_{u,\ell} < \phi_{u,\ell} \simeq 750\ N.m^{-2}}$

$\Rightarrow$ l'eau évacue mieux la chaleur que l'air

$\Rightarrow$ <u>le refroidissement du combustible est plus efficace avec de l'eau qu'avec de l'air</u>

[et donc $T(x=\ell) > T_0$!]

3.3 $\boxed{T(x=\ell) \xrightarrow[h_{rc} \to +\infty]{} T_{ext} = T_0}$

ce qui est normal car $h_{rc} \to +\infty$ correspond à une couche limite (couche d'air dont la température varie entre $T(x=\ell)$ et $T_{ext} = T_0$) d'épaisseur nulle $\Rightarrow T(x=\ell) \to T_{ext} = T_0$

[Si $T(x=\ell)$ est proche de T_{ext}, on peut écrire le flux radiatif échangé à travers la face F_2 comme $\phi_r \simeq h_r S(T(x=\ell) - T_{ext})$:

posons $T(x=\ell) = T_{ext}(1+\varepsilon)$ avec $\varepsilon = \dfrac{T(x=\ell) - T_{ext}}{T_{ext}} \ll 1$

$$\Rightarrow T(x=\ell)^4 = T_{ext}^4 (1+\varepsilon)^4 \simeq T_{ext}^4 (1 + 4\varepsilon \dots) \text{ pr } \varepsilon \ll 1$$

donc $\phi_r = \sigma S (T(x=\ell)^4 - T_{ext}^4)$ d'après loi de Stefan-Boltzmann

$$\simeq \sigma S T_{ext}^4 (1 + 4\varepsilon - 1 \dots) \text{ pr } \varepsilon \ll 1$$

$$\simeq 4\sigma T_{ext}^4 S\, \varepsilon \simeq 4\sigma T_{ext}^4 S \frac{T(x=\ell) - T_{ext}}{T_{ext}}$$

$$\simeq 4\sigma S T_{ext}^3 S (T(x=\ell) - T_{ext})$$

$$\simeq h_r S (T(x=\ell) - T_{ext}) \text{ avec } h_r = 4\sigma T_{ext}^4$$

= coeff. de transfert radiatif

Ainsi sur la face F_2 on a : $\phi_{th} = \phi_{cc} + \phi_r$

$$\simeq (h_{cc} + h_r) S (T(x=\ell) - T_0)$$

(h_{cc} = coeff de transfert conducto-convectif)

$$\simeq h_{rc} S (T(x=\ell) - T_0)$$

avec $h_{rc} = h_{cc} + h_r$ = coeff de transfert radio-convectif]