—QUELQUES CIRCUITS ÉLECTRIQUES—

Les parties **A, B** et **C** sont totalement indépendantes

Partie A : étude préliminaire d'une diffusion thermique et électrique

L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct (Ox, Oy, Oz) de base $\left(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$.

Un cylindre circulaire droit (**C**), homogène, isotrope et d'axe Ox, est limité par deux sections droites (**S₁**) et (**S₂**), orthogonales à l'axe Ox, de rayon r et distantes de ℓ. Soit (**Sₑ**) la surface latérale de ce cylindre (figure **1**).

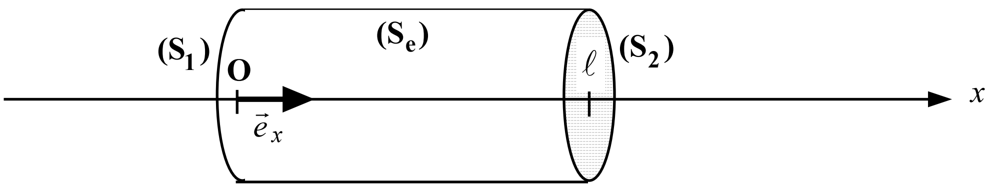

Figure **1**

Ce cylindre, constitué d'un matériau de conductivité thermique λ constante, est conducteur de la chaleur et ce phénomène est envisagé en régime permanent et stationnaire. La conduction thermique est unidirectionnelle et parallèle à l'axe Ox : les surfaces isothermes sont planes et perpendiculaires à l'axe Ox. Grâce à des sources, les sections terminales sont maintenues à des températures constantes respectives $T(x=0) = T_1$ et $T(x=\ell) = T_2$, avec $T_1 > T_2$ (figure **2**).

Soit Φ_{th} le flux thermique qui traverse une section droite, d'aire S et orthogonale à l'axe Ox. Le vecteur associé au flux est le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_{th}$, lié à la température par la loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda\, \overrightarrow{grad}\, T$. Le système étant unidimensionnel et la propagation unidirectionnelle, on peut écrire :

$$\vec{j}_{th} = j_{th}(x)\ \vec{e}_x = -\lambda \frac{dT(x)}{dx}\ \vec{e}_x.$$

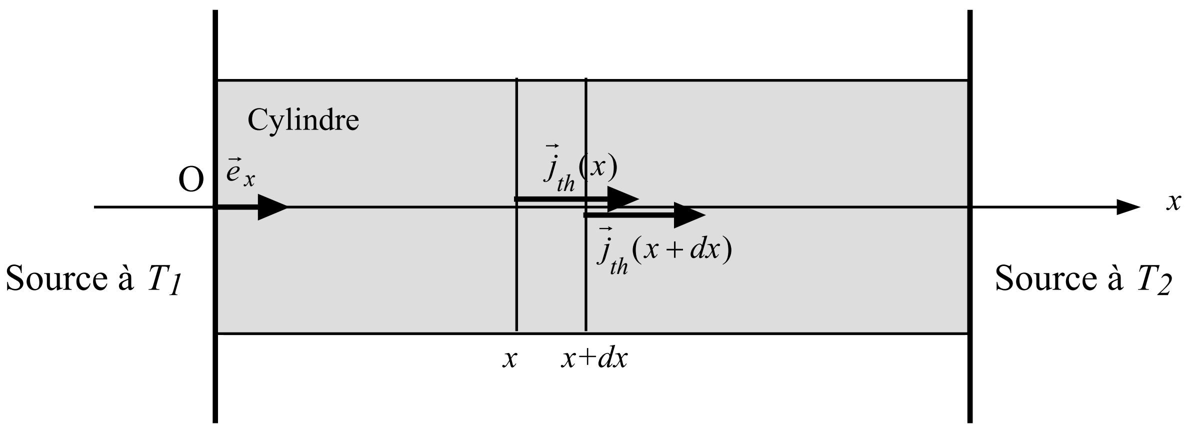

Figure **2**

I. Diffusion thermique dans un barreau calorifugé

La surface latérale (**S_e**) est parfaitement calorifugée.

1) Exprimer le flux thermique (ou puissance thermique) Φ_{th} qui traverse une section droite d'abscisse x, en fonction de la densité de courant thermique $j_{th}(x)$ et de l'aire S de la section.
2) Soit la tranche élémentaire cylindrique de matériau d'épaisseur dx, comprise entre les plans d'abscisses x et $x+dx$. Sachant qu'en régime permanent, il n'y a aucune accumulation d'énergie en tout point du matériau, proposer un bilan thermique de l'élément de volume en considérant le flux thermique entrant et le flux thermique sortant.
3) En déduire l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$ à l'intérieur du cylindre.
4) Etablir la loi de variation $T(x)$.
5) Tracer l'allure de la courbe représentative de cette fonction $T(x)$.

II. Diffusion thermique avec pertes latérales

Le cylindre (**C**) est maintenant soumis, à travers sa surface latérale (**S_e**), à des pertes thermiques latérales, vers l'extérieur (source à température constante T_e). La conduction demeure essentiellement unidirectionnelle et parallèle à l'axe Ox, et $T(x)$ est la température locale uniforme à l'abscisse x. Les pertes correspondent à une puissance thermique $dP_e = h\,[T(x) - T_e]\,dS_e$, expression dans laquelle h est une constante positive et dS_e la surface latérale de la tranche élémentaire comprise entre les sections d'abscisses x et $x+dx$.

1) Donner la relation existant entre dS_e et dx.
2) Le régime est permanent : proposer un bilan des flux thermiques, en raisonnant sur une tranche élémentaire de matériau d'épaisseur dx.
3) En déduire l'équation différentielle vérifiée par la fonction ($T(x) - T_e$).
4) La loi de variation de la température se met sous la forme :
$T(x) = A + B\exp(\omega x) + C\exp(-\omega x)$.
Exprimer les constantes A et ω en fonction des données de l'énoncé.

III. Diffusion thermique et électrique

Le cylindre (**C**), conducteur de l'énergie thermique, mais aussi de l'électricité, est thermiquement et électriquement isolé sur sa face latérale. Les sections terminales (**S_1**) et (**S_2**) sont maintenues simultanément à des températures constantes respectives T_1 et T_2, et à des potentiels constants respectifs V_1 et V_2. Il s'établit un régime stationnaire : les surfaces isothermes et équipotentielles sont planes et perpendiculaires à l'axe Ox. La conductivité électrique σ est indépendante de la température dans le domaine considéré, et le cylindre est considéré comme un conducteur ohmique, bien que $T(x)$ ne soit pas uniforme.

1) Exprimer, par application de la loi d'Ohm, en fonction de σ, S et dx, la résistance dR de la tranche élémentaire d'épaisseur dx.
2) I est l'intensité constante du courant qui traverse le cylindre. Il est rappelé que la puissance électrique reçue par un résistor, de résistance R et parcouru par un tel courant, s'écrit $P_{él} = R\,I^2$. En déduire la puissance électrique $dP_{él}$ reçue par la tranche élémentaire précédente.
3) Le régime est permanent : écrire le bilan thermique de cette tranche élémentaire d'épaisseur dx, en tenant compte du flux thermique entrant, du flux thermique sortant et de la puissance thermique reçue par effet Joule.
4) En déduire l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$ à l'intérieur du cylindre.
5) Les températures des sections terminales sont maintenues égales à T_o.
5.1 Établir la loi de variation $T(x)$ de la température.

5.2 Tracer l'allure de la courbe représentative de cette fonction $T(x)$.
5.3 La température présente une valeur maximale T_m. Déterminer $x(T_m)$.
5.4 Exprimer les flux thermiques $\Phi_{th,1}$ et $\Phi_{th,2}$ sortant de chacune des sections terminales.
5.5 *Application numérique*.

$$\sigma = 1{,}0\times 10^5\ \Omega^{-1}.\ \mathrm{m}^{-1}\ ;\quad \lambda = 1{,}0\ \mathrm{W.\ m^{-1}.\ K^{-1}}\ ;\quad \ell = 1{,}0\times 10^{-2}\ \mathrm{m}\ ;$$
$$I = 10\ \mathrm{A}\ ;\quad T_o = 300\ \mathrm{K}\ ;\quad S = 5{,}0\times 10^{-5}\ \mathrm{m}^2.$$

Calculer $(T_m - T_o)$, $\Phi_{th,1}$ et $\Phi_{th,2}$.