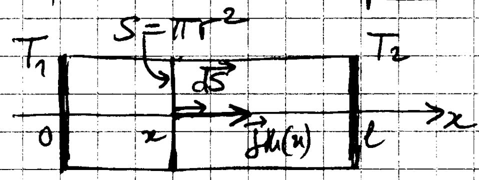
Corrigé de la partie A de l'épreuve Phys II – 2007

Etude préliminaire d'une diffusion thermique et électrique

I. Diffusion thermique dans un barreau calorifugé



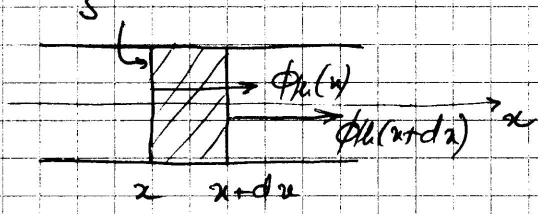
surface latérale calorifugée → conduction thermique // à (Ox)

$T_1 > T_2$ → conduction thermique selon $+\vec{e}_x$

1. $\boxed{\phi_{th} = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS} = \iint_S j_{th}(x)\,\vec{e}_x \cdot dS\,\vec{e}_x = j_{th}(x)\iint_S dS = j_{th}(x)\,S}$

avec $S = \pi r^2$

2. En régime permanent, T, j_{th} et ϕ_{th} ne dépendent pas du temps et il n'y a pas d'accumulation d'énergie en tout point du matériau



donc pour une tranche d'épaisseur dx pendant intervalle de temps dt :

$$\underbrace{\delta Q_e}_{\substack{\text{chaleur entrant}\\ \text{à } x \text{ pdt } dt}} = \underbrace{\delta Q_s}_{\substack{\text{chaleur sortant}\\ \text{à } x+dx \text{ pdt } dt}}$$

soit $\phi_{th}(x)\,dt = \phi_{th}(x+dx)\,dt$

donc $\boxed{\dfrac{d\phi_{th}}{dx} = 0}$

3. Donc $\dfrac{dj_{th}}{dx} = 0$ d'après I.1

or $j_{th}(x) = -\lambda \dfrac{dT}{dx}$ d'après la loi de Fourier

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{d^2T}{dx^2} = 0}$ pr $0 \leq x \leq \ell$

[on retrouve bien l'éq. de diffusion 1d en régime permanent]

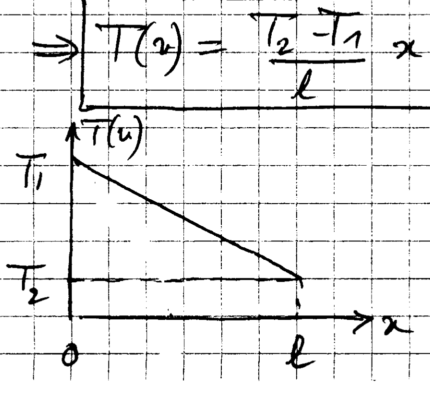
4. On intègre deux fois : $T(x) = Ax + B$

avec $T(0) = T_1 \Rightarrow B = T_1$

$T(\ell) = T_2 \Rightarrow A\ell + T_1 = T_2 \Leftrightarrow A = \dfrac{T_2 - T_1}{\ell}$

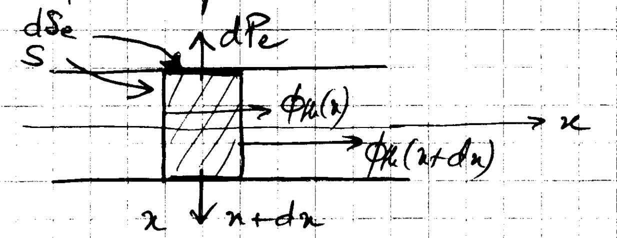
$\Rightarrow \boxed{T(x) = \dfrac{T_2 - T_1}{\ell}\,x + T_1}$ droite de pente $\dfrac{T_2 - T_1}{\ell} < 0$

5.



II Diffusion thermique avec pertes latérales

On a des pertes thermiques via la surface latérale (pertes conducto-convectives données par la loi de Newton) mais la conduction thermique reste unidirectionnelle, selon $+\vec{e_x}$.



1. $\boxed{dS_e = 2\pi r\, dx}$

2. En régime permanent, il n'y a pas d'accumulation d'énergie donc pour une tranche dx pendant dt :

$$\delta Q_e = \delta Q_s + \delta Q_{lat} \quad \text{avec } \delta Q_{lat} = \text{chaleur sortant latéralement} = dP_e\, dt$$

donc $\phi_{th}(x)\,dt = \phi_{th}(x+dx)\,dt + dP_e\,dt$

soit $d\phi_{th} = \phi_{th}(x+dx) - \phi_{th}(x) = -dP_e = -h\left[T(x) - T_e\right] 2\pi r\, dx$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\phi_{th}}{dx} = -2\pi r h\left(T(x) - T_e\right)}$$

3. or $\left.\begin{array}{l} \phi_{th}(x) = j_{th}(x)\, S \\ j_{th}(x) = -\lambda \dfrac{dT}{dx} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{d\phi_{th}}{dx} = -\lambda S \dfrac{d^2T}{dx^2} = -\lambda \pi r^2 \dfrac{d^2T}{dx^2}$

donc $\boxed{\dfrac{d^2T}{dx^2} = \dfrac{2h}{\lambda r}\left(T(x) - T_e\right)}$ (1)

soit en posant $\underline{\theta(x) = T(x) - T_e}$: $\boxed{\dfrac{d^2\theta}{dx^2} = \dfrac{2h}{\lambda r}\,\theta}$ (2)

4. On admet que $T(x)$ est de la forme :

$$T(x) = A + B e^{\omega x} + C e^{-\omega x}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = B\omega^2 e^{\omega x} + C\omega^2 e^{-\omega x}$$

et (1) devient : $\omega^2\left(B e^{\omega x} + C e^{-\omega x}\right) = \dfrac{2h}{\lambda r}\left[A - T_e + B e^{\omega x} + C e^{-\omega x}\right]$

soit $\underbrace{\left(\omega^2 - \dfrac{2h}{\lambda r}\right)}_{\text{cste}} \underbrace{\left(B e^{\omega x} + C e^{-\omega x}\right)}_{\text{fct de } x} = \underbrace{\dfrac{2h}{\lambda r}\left(A - T_e\right)}_{\text{cste}}$ qui doit être vérifiée $\forall x \in [0, \ell]$

la seule façon de vérifier cette équation $\forall x$ est d'avoir :

$$\text{et} \begin{cases} \omega^2 - \dfrac{2h}{\lambda r} = 0 \\ A - Te = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \omega = \sqrt{\dfrac{2h}{\lambda r}} \\ A = T_e \end{array}}$$

[on aurait aussi pu choisir $\omega = -\sqrt{\dfrac{2h}{\lambda r}}$]

[l'autre solution vérifiant cette éq. est $Be^{\omega x} + Be^{-\omega x} = 0$ mais alors $T(x) = \text{cte}$ ce qui n'est pas une solution physique]

[On aurait pu résoudre directement (2) car c'est une équatiff du 2e ordre à coefficients constants $\rightarrow$ son éq. caractéristique est $r'^2 = \dfrac{2h}{\lambda r}$ de solution $r' = \pm\sqrt{\dfrac{2h}{\lambda r}}$

donc la solution de (2) est de la forme :

$$\theta(x) = Be^{\omega x} + Ce^{-\omega x} \quad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{2h}{\lambda r}}$$

soit $T(x) = \theta(x) + Te$

$$= T_e + Be^{\omega x} + Ce^{-\omega x} \Rightarrow A = Te. \ ]$$

[les ctes B et C peuvent être déterminées sachant que $T(0) = T_1$, $T(\ell) = T_2$]

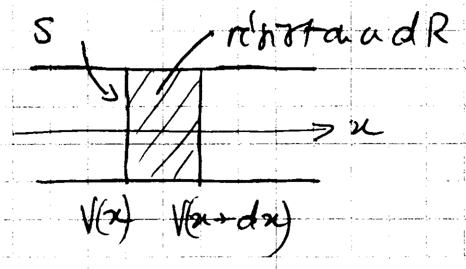
III Diffusion thermique et électrique

On n'a plus de pertes latérales mais le barreau est maintenant un conducteur ohmique parcouru par un courant (à cause de la différence de potentiel $V_1 - V_2$ à ses bornes)

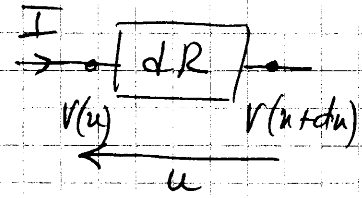
$\Rightarrow$ <u>le barreau reçoit de l'énergie par effet Joule</u>

On est donc dans le cas d'une diffusion thermique avec source.

1.



soit le schéma électrique :



D'après l'énoncé, les équipotentielles sont des plans $\perp (Ox)$

$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(x)\,\vec{e}_x$

et $\vec{j_e}(M) = \sigma\vec{E}(M) = \sigma E(x)\,\vec{e}_x$ d'après la loi d'Ohm

$\vec{j_e}$: densité de courant électrique

$\Rightarrow$ courant I est $\parallel$ à (Ox)

On ne connait pas le sens du courant I dans le barreau (car on ne sait lequel des deux potentiels V_1 et V_2 est le + gd) mais cela n'a pas d'importance ici, l'énergie par effet Joule étant en I^2.

Donc supposons que le courant I ~~soit~~ dans le sens $+\vec{e_x}$:

on a alors $u = V(x) - V(x+dx) = dR\, I$

or $dV = V(x+dx) - V(x) = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} = -E(x)dx = -\dfrac{je(x)}{\sigma} dx$

et $I = \iint_S \vec{je} \cdot \vec{dS} = \iint_S je(x)\, \vec{e_x} \cdot dS\, \vec{e_x} = je(x) S$

$\Rightarrow je(x) = \dfrac{I}{S}$ et $u = -dV = \dfrac{je(x)}{\sigma} dx = \dfrac{dx}{\sigma S} I$

$$\Rightarrow \boxed{dR = \frac{dx}{\sigma S}}$$

[On retrouve bien la résistance d'un barreau de longueur dx et de section S...]

2. La puissance électrique reçue par la tranche dx est donc :

$$\boxed{dP_{el} = dR\, I^2 = \frac{dx}{\sigma S} I^2}$$

3. En régime permanent il n'y a pas d'accumulation d'énergie donc pour une tranche dx pendant dt :

$\delta Q_e + \delta Q_{elec} = \delta Q_s$ avec δQ_{elec} = chaleur reçue par effet Joule pdt dt $= dP_{el}\, dt$

$\Rightarrow \phi_{th}(x) dt + dP_{el} dt = \phi_{th}(x+dx) dt$

$\Rightarrow d\phi_{th} = + dP_{el} = \dfrac{I^2}{\sigma S} dx$

soit $\boxed{\dfrac{d\phi_{th}}{dx} = \dfrac{I^2}{\sigma S}}$

4. $\left.\begin{array}{l}\phi_{th}(x) = j_{th}(x) S \\ j_{th}(x) = -\lambda \dfrac{dT}{dx}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{d\phi_{th}}{dx} = -\lambda S \dfrac{d^2T}{dx^2}$

donc $\boxed{\dfrac{d^2T}{dx^2} = -\dfrac{I^2}{\lambda \sigma S^2}}$

[On retrouve bien l'éq. de diffusion 1d en régime permanent avec source : $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = 0 = \lambda \Delta T + \dfrac{P_{él}}{S\ell}$

↳ puissance volumique apportée par la source ↳ + car gain d'énergie

avec $P_{él} = \int_0^\ell dP_{él} = \dfrac{\ell}{\sigma S} I^2$

$\Rightarrow \Delta T = \dfrac{d^2T}{dx^2} = -\dfrac{P_{él}}{\lambda S \ell} = -\dfrac{I^2}{\lambda \sigma S^2}$]

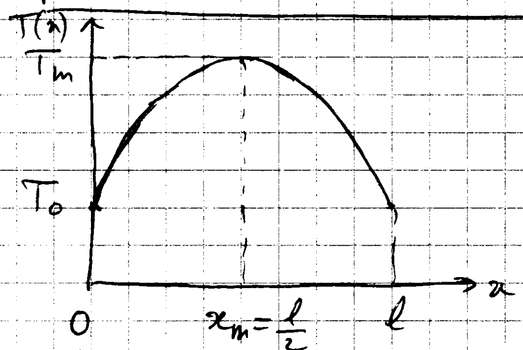
5.1 On intègre deux fois : $T(x) = \dfrac{-I^2}{2\lambda\sigma S^2} x^2 + Ax + B$

avec $T(0) = T_0 \Rightarrow B = T_0$

$T(\ell) = T_0 \Rightarrow -\dfrac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}\ell^2 + A\ell + \cancel{T_0} = \cancel{T_0} \Leftrightarrow A = \dfrac{I^2 \ell}{2\lambda\sigma S^2}$

$\Rightarrow \boxed{T(x) = \dfrac{I^2}{2\lambda\sigma S^2} x(\ell - x) + T_0}$ parabole concave (terme en $x^2 < 0$)

5.2



5.3 Par symétrie $\boxed{x_m = x(T_m) = \ell/2}$

[on peut le retrouver par $\left.\dfrac{dT}{dx}\right|_{x_m} = 0$]

[c'est logique : le barreau chauffe par effet Joule : T est max au pt le + loin des bords càd au centre du barreau]

5.4 $\phi_{th}(x) = j_{th}(x) = -\lambda S \dfrac{dT}{dx} = \dfrac{I^2}{\sigma S}\left(x - \dfrac{\ell}{2}\right)$

donc $\phi_{th1} = \phi_{th}(0) = -\dfrac{I^2}{\sigma S}\dfrac{\ell}{2}$

et $\boxed{\phi_{th2} = \phi_{th}(\ell) = \dfrac{I^2}{\sigma S}\dfrac{\ell}{2} = -\phi_{th1}}$

On a $\phi_{th2} > 0$ et $\phi_{th1} < 0$: la chaleur dégagée par effet Joule est évacuée par les deux faces S_1 et S_2

et $|\phi_{th2}| = |\phi_{th1}|$ car même T_0 aux bornes $\Rightarrow T(x)$ sym par rapport à $x_m = \dfrac{\ell}{2}$ $\Rightarrow |\phi_{th2}| = |\phi_{th1}|$

5.5 AN :

$$\underline{T_m - T_0} = T\left(\frac{l}{2}\right) - T_0 = \frac{I^2 l^2}{8 \lambda \sigma S^2}$$

$$\simeq \frac{10^2 \times 10^{-4}}{8 \times 1 \times 10^5 \times (5 \times 10^{-5})^2} \simeq \frac{10^{-2}}{8 \times 25 \times 10^{-5}} \simeq \frac{1000}{200} \simeq \underline{5\ K}$$

$$\underline{\phi_{th2} = -\phi_{th1}} \simeq \frac{10^2 \times 10^{-2}}{2 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-5}} \simeq \underline{+0,1\ W}$$