CY Cergy Paris Université
S3 – CUPGE / MP / MSI

Phénomènes de transport

Travaux dirigés

Année 2020-2021

Plan du cours

1. **Description microscopique de la matière : théorie cinétique du gaz parfait :**
   Modèle du gaz parfait, calcul de la pression, température, vitesse quadratique moyenne.

2. **Diffusion de particules**
   Loi de Fick ; équation de diffusion à une et trois dimensions (avec et sans apport de particules), régime transitoire et permanent.

3. **Transferts thermiques**
   Conduction thermique (loi de Fourier, équation de la chaleur à une et trois dimensions, avec et sans source d'énergie, régime transitoire et permanent, résistance thermique) ; transferts thermiques conducto-convectifs ; rayonnement thermique d'un corps noir.

SITE WEB DU COURS : `http://cpinettes.u-cergy.fr/S3-Transport`

Vous y trouverez :

- des petites tests de cours pour vous aider à assimiler et approfondir les notions vues en cours
- les énoncés du QCM et de l'examen de l'année dernière
- les corrigés des tests de cours, de quelques exos de TD, des exos supplémentaires des TD, du QCM et de l' examen de l'année dernière
- des liens vers des vidéos/sites illustrant le cours
- un formulaire de maths pour la physique

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Liste, non exhaustive, de livres recommandés pour ce cours...

Théorie cinétique du gaz parfait

– *"J'intègre : Physique tout-en-un PCSI"*, par Salamito et al., éd. Dunod
– *"Compétences Prépas : Physique PCSI"*, par Augier et More, éd. Tec&Doc Lavoisier

Diffusion de particules et transferts thermiques

– *"J'intègre : Physique tout-en-un PC-PC**, par Sanz et al., éd. Dunod
– *"Compétences Prépas : Physique PC-PC*"*, par Olivier et Lewis, éd. Tec&Doc Lavoisier
– *"H-Prépa Thermodynamique 2ème Année"*, par Brébec et al., éd. Hachette
– *"Thermodynamique, 1ère et 2ème année"*, par Olivier et Gié, éd. Tec&Doc Lavoisier

Formulaire

	Conduction électrique	*Diffusion de particules*	*Conduction thermique*
Grandeur transportée	charge électrique q	particule	chaleur Q
Flux	$I = \frac{dq}{dt} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$	$\Phi_{part} = \frac{dN}{dt} = \iint_S \vec{j}_{part} \cdot d\vec{S}$	$\Phi_{th} = \frac{\delta Q}{dt} = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$
Vecteur densité de courant	électrique : $\vec{j} = -\gamma \, \overrightarrow{grad}\, \Phi$ loi d'Ohm γ = conductivité électrique Φ = potentiel électrostatique	de particules : $\vec{j}_{part} = -D \, \overrightarrow{grad}\, n^*$ loi de Fick D = coefficient de diffusion n^* = densité de particules	thermique : $\vec{j}_{th} = -\lambda \, \overrightarrow{grad}\, T$ loi de Fourier λ = conductivité thermique T = température
Équation de conservation	de charge : $\frac{\partial \rho_{él}}{\partial t} + div\, \vec{j} = 0$	du nombre de particules : $\frac{\partial n^*}{\partial t} + div\, \vec{j}_{part} = \sigma_a$ σ_a = nbre de part/u. de vol. et de tps	de l'énergie : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + div\, \vec{j}_{th} = P_v$ P_v = puissance volumique
Régime permanent (sans source)	$div\, \vec{j} = 0 \Rightarrow I = cste$	$div\, \vec{j}_{part} = 0 \Rightarrow \Phi_{part} = cste$	$div\, \vec{j}_{th} = 0 \Rightarrow \Phi_{th} = cste$
Résistance ***Barreau longueur L section S***	électrique : $R = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{I}$ $R = \frac{L}{\gamma S}$		thermique : $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{th}}$ $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$
Equation de diffusion		$\frac{\partial n^*}{\partial t} = D \, \Delta n^* + \sigma_a$	$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \, \Delta T + P_v$

Série 1 : Théorie cinétique du gaz parfait

1. *Modèle simplifié du gaz parfait*

1°) Que vaut la vitesse moyenne $\langle \vec{v} \rangle$ des particules dans un gaz au repos ? Rappeler la définition de la vitesse quadratique moyenne u des N particules d'un gaz.

2°) Rappeler les hypothèses du gaz parfait. On a vu dans le cours que pour un gaz parfait de densité particulaire n^*, la pression est reliée à la vitesse quadratique moyenne par la relation : $P = 1/3\ n^*\ m\ u^2$. En déduire la relation entre u et la température T du gaz parfait. Pourquoi dit-on que la température est une mesure de l'agitation moléculaire?

3°) On va considérer un modèle simplifié du gaz parfait et reprendre le calcul de la pression en faisant les hypothèses suivantes :

- toutes les particules ont la même vitesse en module, égale à la vitesse quadratique moyenne u.
- ces vitesses sont orientées suivant $\pm\vec{u}_x$, $\pm\vec{u}_y$ ou $\pm\vec{u}_z$.
- la répartition des vitesses dans ces 6 directions est isotrope.

On considère un gaz parfait à la température T contenant n^* particules de masse m par unité de volume.

a) Calculer la variation de quantité de mouvement d'une particule lors du choc contre une surface élémentaire $\overrightarrow{dS} = dS\ \vec{u}_x$ de la paroi.
b) Calculer le nombre de particules frappant la surface $\overrightarrow{dS}$ pendant un intervalle de temps élémentaire dt.
c) Calculer la force exercée *par le gaz* sur la surface $\overrightarrow{dS}$. En déduire la pression exercée par le gaz sur la paroi. Montrer que l'on retrouve bien le résultat du cours.

2. *Quelques ordres de grandeur pour l'air*

On cherche à calculer quelques ordres de grandeur pour l'air sous pression atmosphérique et à température usuelle de 20°C. Le rayon des molécules O_2 et N_2 vaut $r \sim$ 0.15 nm. L'air étant un gaz peu dense, on peut considérer qu'il se comporte comme un gaz parfait.

On donne *: $R = 8{,}31$ J. K^{-1} mol^{-1} ; $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J.K^{-1} ; masse molaire de l'air : M=29 g/mol.*

1°) Calculer la densité de particules n^* de cet air. En déduire la distance moyenne d séparant deux molécules d'air voisines. Pouvez-vous estimer ces valeurs dans le cas d'un liquide ou d'un solide ?

2°) Calculer le nombre de molécules dans 1 mm^3 de cet air. A-t-on raison de supposer les molécules d'air ponctuelles à l'échelle macroscopique ? Faites un calcul d'ordre de grandeur pour un volume de cet air V = 1L.

3°) Calculer la vitesse quadratique moyenne u des molécules de cet air.

4°) On souhaite estimer le libre parcours moyen ℓ dans l'air, càd la distance moyenne parcourue par une molécule d'air entre deux collisions successives. Pour cela, le modèle du gaz parfait ne convient pas. Pourquoi ?

On va considérer un modèle microscopique simple qui donne le bon ordre de grandeur : le modèle des sphères dures avec cible fixe. En assimilant les molécules d'air à des sphères dures de rayon r et en considérant une molécule se déplaçant à la vitesse moyenne v au milieu des autres molécules immobiles, exprimer le libre parcours moyen de cette molécule en fonction de r et n^*.

Estimer ℓ pour l'air. En déduire le nombre moyen de collisions que subit une molécule d'air par seconde.

3. ***Atmosphère terrestre***

L'atmosphère terrestre est essentiellement composée d'azote N_2 (78%) et d'oxygène O_2 (21%), mais ne contient quasiment pas d'hélium He (5×10^{-4} %) ni d'hydrogène H_2 (5×10^{-5} %), bien que ces deux gaz constituent 99% de la matière de l'univers. On va voir que c'est parce que la gravitation est incapable de retenir l'hélium et l'hydrogène, tandis qu'elle parvient à retenir l'azote et l'oxygène.

On donne *: constante de gravitation* $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ *SI ; masse et rayon de la Terre* $M_T = 6 \times 10^{24}$ *kg et* $R_T = 6{,}4 \times 10^6$ *m ;* $R = 8{,}31$ *J.* K^{-1} mol^{-1} *;* $M_{N2} = 28$ *g/mol,* $M_{O2} = 32$ *g/mol*, $M_{He} = 4$ *g/mol* et $M_{H2} = 2$ *g/mol.*

1°) Calculer la vitesse de libération de la Terre, càd la vitesse minimale qu'il faut fournir à un corps pour qu'il se libère de l'attraction terrestre.

2°) Calculer les vitesses quadratiques moyennes de N_2, O_2, He et H_2 à la surface de la Terre de température moyenne égale à 20°C.

3°) Dans un gaz, une partie des molécules se déplace à une vitesse bien supérieure à la vitesse moyenne. On estime en fait, qu'un gaz ne s'échappera pas de la Terre si la vitesse de libération est au moins 10 fois plus grande que la vitesse moyenne de ses molécules. En déduire que l'azote et l'oxygène ne s'échappent pas de l'atmosphère terrestre contrairement à l'hélium et l'hydrogène.

3*. Earth's atmosphere

Earth's atmosphere is essentially composed by dinitrogen N_2 (78%) and dioxigen O_2 (21%). Surprisingly, it barely contains Helium He (5×10^{-4} %) or dihydrogen H_2 (5×10^{-5} %), although such two gases compose almost the 99% of the universe's matter. We will now see that this is due to the fact that the gravitational force of the Earth is unable to retain helium and dihydrogen, while it is instead capable of retaining dinitrogen and dioxigen.

Data : *gravitational constant* $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ *SI ; mass and radius of the Earth* $M_T = 6 \times 10^{24}$ *kg and* $R_T = 6{,}4 \times 10^6$ *m ;* $R = 8{,}31$ *J.* K^{-1} mol^{-1} *;* $M_{N2} = 28$ *g/mol,* $M_{O2} = 32$ *g/mol,* $M_{He} = 4$ *g/mol et* $M_{H2} = 2$ *g/mol.*

1°) Compute the escape velocity of the Earth, that is, the minimum velocity that a body should have in order to be able to leave the Earth, overcoming its gravitational attractive force.

2°) Compute the root-mean-square speeds of N_2, O_2, He and H_2 in the Earth's surface, assuming an average temperature of 20ºC.

3°) In a gas, a certain part of the molecules moves at a speed that is largely superior than its root-mean-square speed. In fact, it is considered that a gas will not be able to escape from the Earth's atmosphere if its escape velocity is at least 10 times larger than the root-mean-square speed of its molecules. In the light of this, explain why dinitrogen and dioxygen are retained in the Earth's atmosphere while helium and dihydrogen are not.

Exercice supplémentaire

4. *Fuite d'air dans une cabine spatiale* *(plus difficile)*

Une cabine spatiale de volume $V = 50 m^3$ contient de l'air, mélange de diazote N_2 (80%) et dioxygène O_2 (20%) assimilé à un gaz parfait, maintenu à la température $T_0 = 295K$. En régime normal, la pression est $P_0 = 1atm$. A la suite d'un accident, un trou de surface S met la cabine en communication avec le vide extérieur. La climatisation fonctionnant toujours, la température reste égale à T_0 mais la pression P diminue lentement. Pour simplifier le calcul, nous ferons les hypothèses suivantes :

- le trou étant petit, l'air se détend lentement en restant à l'équilibre thermodynamique.
- l'air est uniforme dans toute la cabine.
- les molécules ont une vitesse, égale en norme à leur vitesse quadratique moyenne, et orientée selon $\pm\vec{u}_x$, $\pm\vec{u}_y$, $\pm\vec{u}_z$ de façon isotrope.

On donne : $M_{N2} = 28$ *g/mol et* $M_{O2} = 32$ *g/mol.*

1°) Calculer les vitesses quadratiques moyennes des molécules N_2 et O_2, u_1 et u_2. Comparer les énergies cinétiques de chaque molécule. Quelle molécule va s'échapper le plus vite?

2°) Etablir les expressions du nombre de molécules N_2 et O_2 s'échappant de la cabine entre les instants t et $t+dt$, dN_1 et dN_2.

3°) En déduire les équations différentielles vérifiées par les pressions partielles de N_2 et O_2, $P_1(t)$, $P_2(t)$, en fonction de u_1, u_2, S et V.

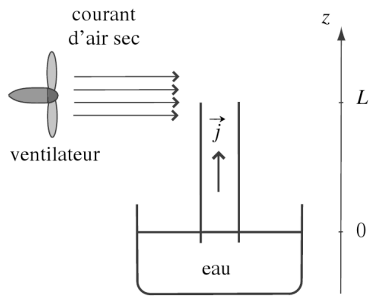
4°) Etablir les expressions de $P_1(t)$ et $P_2(t)$. En déduire les nombres de molécule N_2 et O_2 dans la cabine en fonction du temps, $N_1(t)$ et $N_2(t)$. Commenter les limites de $N_1(t)$ et $N_2(t)$.

5°) Après une heure et pour $S = 1\ mm^2$, puis pour $S = 1\ cm^2$, donner un ordre de grandeur de la pression P et du rapport N_1 / N_2.

Série 2 : Transport moléculaire

1. Mesure du coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air

Un tube vertical, de section S = 20 cm^2 plonge dans un récipient rempli d'eau. L'eau s'évapore et la vapeur d'eau diffuse à travers l'air dans le tube. A l'extrémité supérieure du tube, un ventilateur souffle un courant d'air sec qui chasse les molécules de vapeur d'eau, de telle sorte que la concentration en vapeur d'eau au sommet du tube, en $z = L$, peut être considérée comme nulle. Le coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air est D. La mesure de la masse d'eau évaporée pendant une durée donnée permet de déterminer la valeur numérique de D comme nous allons le montrer.



On suppose le régime permanent établi.

1°) Exprimer la densité volumique de molécules de vapeur d'eau dans le tube $n^*(z)$ en fonction de sa valeur n_0^* en z = 0.

2°) En déduire le nombre de molécules d'eau s'évaporant par unité de temps en fonction des données du problème.

3°) En z=0, la vapeur d'eau est en équilibre avec l'eau liquide à la pression de vapeur saturante de l'eau à la température T de l'eau, $P_{sat}(T)$. En assimilant la vapeur d'eau à un gaz parfait, en déduire n_0^* en fonction de $P_{sat}(T)$, T, R et N_A le nombre d'Avogadro.

4°) La masse d'eau évaporée est de 87 mg par jour. En déduire D. Faire l'A.N. Comparer à la valeur trouvée dans le Handbook : D = 2,42 x 10^{-5} m^2.s^{-1} à T = 25°C sous une pression de 1,013 bar.

On donne :

$L = 1{,}0\ m\ ;\ T = 25°C\ ;\ P_{sat}(25°C) = 3{,}2 \times 10^3\ Pa\ ;$

$R = 8{,}3\ J.K^{-1}.mol^{-1}$; *masse molaire de l'eau* $M = 18\ g/mol$.

2. Diffusion de neutrons dans les barres de contrôle

A la sortie d'un réacteur nucléaire, des neutrons diffusent dans une barre de contrôle suivant la direction *0x* avec un coefficient de diffusion *D*. On notera $n^*(x,t)$ la densité de neutrons dans la barre de contrôle. Au cours de la diffusion, les neutrons subissent de nombreuses collisions avec les atomes de la barre et peuvent être absorbés par ces atomes. On admettra que le nombre de neutrons absorbés dans la barre par unité de volume et de temps suit la loi : $\sigma_a = C\, n^*$, où *C* est une constante positive. Ces barres de contrôle servent à contrôler la réaction en chaîne qui se produit dans le cœur du réacteur en absorbant une partie des neutrons produits lors de la fission des noyaux d'uranium 235. Ces barres sont le plus souvent à base de bore.

On suppose le régime permanent établi.

1°) Quelle est la dimension de *C* ?

2°) Ecrire la relation qui relie le flux de neutrons Φ_n et la densité de neutrons n^*. Quelle est l'unité S.I. du coefficient de diffusion *D* ?

3°) Etablir l'équation différentielle vérifiée par la densité n^* en faisant un bilan du nombre de neutrons sur une tranche élémentaire du barreau comprise entre *x* et *x+dx* pendant une durée élémentaire *dt*.

4°) En déduire la densité de neutrons $n^*(x)$ dans la barre de contrôle, sachant qu'à l'extrémité $x=0$ de la barre de graphite, le réacteur nucléaire dégage N_0 neutrons par unité de temps et de surface. On l'exprimera en fonction de $d=\sqrt{D/C}$.

Tracer qualitativement $n^*(x)$. Quelle est la dimension de *d* et son sens physique ?

2*. Diffusion of neutrons on control bars

At the exit of a nuclear reactor, neutrons diffuse in a control bar following the direction *0x* with a diffusion coefficient *D*. We will note by $n^*(x,t)$ the density of neutrons in the control bar. During the diffusion, the neutrons collide numerous times with the atoms of the control bar and may be absorbed by them. We will assume that the number of neutrons absorbed by the atoms of the control bar, per unit of volume and time, follows the law: $\sigma_a = C\, n^*$, where C is a positive constant. These control bars are used to regulate the chain reaction that takes place in the heart of the nuclear reactor, by means of absorbing a part of the neutrons produced during the fission of the nucleus of uranium 235. Typically, the control bars are basically composed of boron.

We will assume that the system has reached its permanent regime.

1º) What are the dimensions and units of C ?

2º) Write down the relation between the flux of neutrons Φ_n and the density of neutrons n^*. What are the units (in SI) of the diffusion coefficient *D ?*

3º) Obtain the differential equation verified by the density n*. You may derive it by computing the number of neutrons in a infinitesimal section of the bar *dx*, comprised between *x* and *x+dx*, during an infinitesimal period *dt*.

4º) Deduce the density of neutrons n*(x) inside the control bar, considering that at the extreme $x=0$ of the bar, the nuclear reactor releases N_0 neutrons per unity of time and surface. Express the final result as a function of $d=\sqrt{D/C}$.

Trace a qualitative plot of $n^*(x)$. What is the dimension of *d* and what is its physical meaning?

3. *Diffusion d'une tâche d'encre : régime non permanent*

Une goutte d'encre est déposée sur un buvard ; elle s'élargit progressivement sous l'effet de la diffusion. Pour étudier cette expérience, nous faisons un modèle unidimensionnel : on suppose que l'encre diffuse dans un cylindre de section S infiniment long s'étendant de $x = -\infty$ à $x = +\infty$. A l'instant $t = 0$, on introduit N_0 particules d'encre en $x=0$.

On note D le coefficient de diffusion de l'encre sur le buvard.

1°) D'après vous, que valent les conditions initiales : $n^*(x \neq 0, t \to 0)$, $n^*(x = 0, t \to 0)$? et les conditions aux limites : $n^*(x \to \pm\infty, t)$? Justifier votre réponse. Ecrire la condition vérifiée par le nombre total de particules.

2°) On admettra que la solution générale de ce problème est de la forme : $n^*(x,t) = \dfrac{K}{\sqrt{t}} \exp\left(-\dfrac{a\,x^2}{t}\right)$.

A quelle condition sur la constante a, la fonction $n^*(x,t)$ est-elle solution de l'équation de diffusion ?

3°) Vérifier que $n^*(x,t)$ vérifie bien les conditions du 1°). En déduire la valeur de la constante K.

4°) Tracer qualitativement l'allure de la fonction $n^*(x,t)$ en fonction de x pour quelques valeurs croissantes de t.

5°) Etablir l'évolution avec le temps de la largeur à mi-hauteur $\delta(t)$ de la tâche de diffusion. Comparer avec l'expression de la distance de diffusion en fonction du temps obtenue en cours par une analyse d'ordres de grandeurs.

A.N. : En prenant $D = 2\times10^{-9}$ $m^2.s^{-1}$, estimer les temps nécessaires pour que la tâche atteigne les largeurs de 1 mm ; 1 cm ; 1 dm ; 1m.

On donne : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

Exercices supplémentaires

4. Diffusion des neutrons dans l'eau lourde *(pour s'entraîner, très proche des TD)*

Des études sont menées sur le phénomène de diffusion des neutrons ($^1_0$n) lents, dans l'eau lourde $^2H_2O(liq)$ (^2H est le deutérium, isotope de l'hydrogène).

Deux réacteurs voisins de très grand volume, notés (**R₁**) et (**R₂**), remplis d'eau lourde et contenant de la matière fissile, sont reliés par un tube cylindrique horizontal (**T**), d'axe Ox, de section d'aire S et de longueur ℓ. En régime permanent et stationnaire, la température est uniforme et aucun courant de ^2H_2O ne circule (absence de turbulences) dans la colonne (**T**). En tout point M de (**T**), il est admis que les neutrons sont soumis à un phénomène de diffusion unidirectionnel obéissant à la loi de Fick, d'équation, dans ce cas :

$$\vec{j} = -D\,\overrightarrow{grad}\,N^*(x) = j(x)\,\vec{e}_x,$$

avec $\vec{j}$ vecteur densité de courant particulaire, D coefficient (constante positive) de diffusion des neutrons et $N^*(x)$ nombre de neutrons par unité de volume.
Les densités neutroniques (neutrons m^{-3}) dans (**R₁**) et (**R₂**) sont constantes et uniformes, et valent respectivement N_1^* et N_2^*, avec $N_1^* > N_2^*$ (figure **7**).

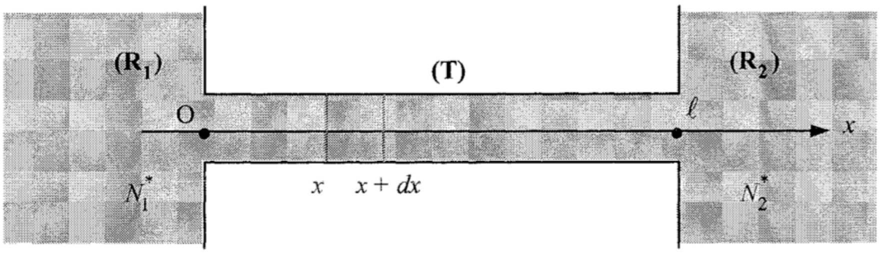


Figure **7**

I. <u>Le milieu n'absorbe pas les neutrons</u>

1. À l'intérieur du tube, $\Phi(x)$ est le flux de particules qui traversent la surface d'aire S, à l'abscisse x. Rappeler la relation qui relie $\Phi(x)$ et $j(x)$.

2. Il n'y a aucune accumulation de neutrons en tout point, à l'intérieur du tube (**T**). Montrer que le bilan particulaire sur un petit élément volumique de colonne, d'aire S et d'épaisseur dx, situé entre les abscisses x et $x+dx$, permet de montrer que la densité particulaire $N^*(x)$ de neutrons est une fonction affine de x, à l'intérieur de (**T**).

3. En déduire la densité $N^*(x)$ à l'intérieur de (**T**), avec $N^*(0) = N_1^*$ et $N^*(\ell) = N_2^*$.

4. Dessiner l'allure de la courbe représentative de la fonction $N^*(x)$.

II. <u>Milieu absorbant</u>

À l'intérieur du tube (**T**), le milieu absorbe maintenant les neutrons à raison de C captures par unité de volume et unité de temps (C constante positive).

1. Proposer un bilan particulaire sur la portion élémentaire du tube comprise entre les sections d'abscisses x et $x+dx$.

2. En déduire la nouvelle densité particulaire $N^*(x)$, avec $N^*(0) = N_1^*$ et $N^*(\ell) = N_2^*$.

3. Dessiner l'allure de la courbe représentative de la nouvelle fonction $N^*(x)$.

5. Le phénomène de sédimentation *(plus difficile)*

L'énoncé et le corrigé sont en ligne : annale 2010 du concours CCP-L2.

Série 3 : Transferts thermiques

1. Petites questions sur les transferts thermiques *[Voir petites questions en ligne]*

1°) Pour un corps de volume donné, quelle géométrie permet de rendre minimale le transfert thermique ? Donner des exemples.

2°) Contrairement à une idée reçue, ce n'est pas la poule qui réchauffe l'œuf mais l'œuf qui réchauffe la poule. Alors pourquoi la poule couve son œuf ?

3°) Tracer qualitativement la variation de la température à l'intérieur d'un double vitrage en ne prenant en compte que les transferts thermiques par conduction en régime permanent.

4°) Un artisan verrier chauffe un tube en verre à une distance L = 10 cm de sa main pour créer un coude. Sachant que la diffusivité thermique du verre vaut $a = 10^{-6}$ m^2/s, estimer la durée pendant laquelle il peut tenir le tube à mains nues.

Même question avec un tisonnier cylindrique en acier de rayon r =1 cm, de longueur L=50 cm, de masse m = 1,24 kg, de conductivité thermique λ = 82 W.m^{-1}.K^{-1} et de chaleur massique c = 0,46 kJ.K^{-1}.kg^{-1}.

5°) Une personne marche pieds nus sur une moquette puis sur un carrelage : la moquette lui semble plus chaude que le carrelage. Or les sols sont à la même température ... Expliquez.

6°) Expliquer pourquoi la température varie peu à l'intérieur d'un corps humain, même dans un bain d'eau froide.

7°) Dans un hall de gare ou sur des terrasses, il est vain de vouloir réchauffer l'air par convection. Alors comment faire ?

8°) Expliquer pourquoi on mesure la température de l'air à l'ombre.

9°) *Orientation d'un panneau solaire*

Le flux solaire de puissance surfacique φ_S arrive sur un panneau solaire de surface S en faisant un angle θ avec la normale au panneau. Calculer le flux solaire reçu par le panneau solaire. Pour quel angle θ ce flux est-il maximum ?

Sachant que l'angle que fait le soleil avec l'horizontale (aussi appelé hauteur du soleil) vaut à Paris et à midi, A =18° un jour d'hiver et A = 65° un jour d'été, quels devraient être les angles d'inclinaison des panneaux solaires à Paris en hiver et en été ?

10°) Pourquoi fait-il plus chaud l'été ?

11°) Pourquoi les nuits claires sont plus fraiches que les nuits couvertes ? Pourquoi fait-il froid la nuit dans le désert ?

2. Simple et double vitrage

L'intérieur d'une pièce est séparé de l'extérieur par un vitrage plan de surface S perpendiculaire à (Ox) et de conductivité thermique λ. Ses faces internes et externes sont aux températures T_i et T_e respectivement ($T_e < T_i$). La surface S du vitrage étant bien plus grande que son épaisseur, on peut négliger les effets de bords et on se place en régime permanent : on peut donc considérer que la température à l'intérieur du vitrage ne dépend que de x.

1°) Le vitrage est simple, d'épaisseur e.

Calculer la température dans la vitre $T(x)$, le flux thermique Φ_1 sortant de la pièce à travers la vitre et la résistance thermique de la vitre. Tracer $T(x)$ dans la vitre.

2°) Le vitrage est double, les deux vitres ont même épaisseur e et sont séparées par une épaisseur e' d'air de conductivité thermique λ'.

Calculer le flux thermique Φ_2 sortant de la pièce à travers ce vitrage. A.N. : Calculer Φ_2 / Φ_1 et les températures T_1 et T_2 des faces intérieures du double vitrage. Tracer $T(x)$ dans le double vitrage.

3°) En plus de la conduction thermique étudiée ci-dessus, on doit tenir compte des échanges thermiques conducto-convectifs entre le verre et l'air. Le flux thermique qu'échange avec l'air une surface S de verre est donné par la loi de Newton: $\Phi = hS\,(T_v - T_a)$, où T_v est la température du verre, T_a celle de l'air et h le coefficient de transfert conducto-convectif, $h>0$. On notera h_i et h_e les coefficients d'échanges conducto-convectifs verre-air intérieur et verre-air extérieur respectivement. L'épaisseur e' étant faible, la convection de l'air à l'intérieur du double vitrage est négligeable.

a) Calculer les résistances thermiques associées à ces échanges conducto-convectifs.

b) Calculer les nouveaux flux thermiques Φ'_1 et Φ'_2. A.N. : Calculer Φ'_2 / Φ'_1. Conclure.

4°) En fait l'intérieur de la pièce est séparé de l'extérieur par un mur en brique d'aire S_b, d'épaisseur e_b et de conductivité λ_b et le double vitrage de la question 2°). Déterminer le flux thermique à travers l'ensemble du mur.

A.N. : $T_i = 292$K ; $T_e = 270$K ; $e = e' = 3$mm ; $\lambda = 1{,}2$ W.m^{-1}.K^{-1} ; $\lambda' = 0{,}025$ W.m^{-1}.K^{-1} ;
$h_i = 10$ W.m^{-2}.K^{-1} ; $h_e = 14$ W.m^{-2}.K^{-1}.

3. Sensation de chaud et de froid

Deux cylindres, isolés thermiquement sur leurs surfaces latérales, de même section S, de même axe (Ox), de conductivités thermiques λ_1 et λ_2, de longueur L_1 et L_2, sont en contact en $x = 0$. On maintient les extrémités $x = -L_1$ et $x = L_2$ aux températures respectives T_1 et T_2 et on se place en régime stationnaire.

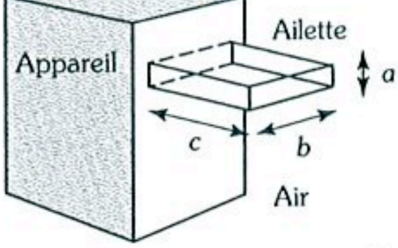
1°) Déterminer la température de contact T_i (à l'interface $x = 0$) en fonction des données.

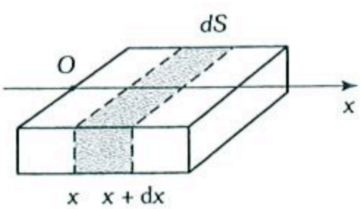
2°) Calculer T_i pour un contact main-bois et pour un contact main-acier, en supposant $L_1 = L_2$. Conclure.

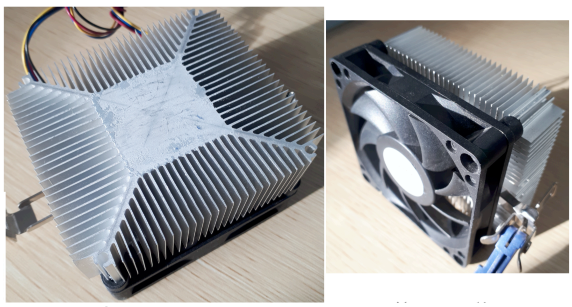
A.N. : $T_1 = 37$°C (main) ; $T_2 = 20$°C (bois ou acier) ; $\lambda_1 = 10$ W.m^{-1}.K^{-1} (main) ; $\lambda_2 = 1$ W.m^{-1}.K^{-1} (bois) ;
$\lambda_2 = 100$ W.m^{-1}.K^{-1} (acier).

4. Ailette de refroidissement

Pour éviter un réchauffement trop important de certains appareils, on place à leur contact des ailettes de refroidissement. Ces ailettes d'épaisseur a, de largeur $b>>a$, de longueur c et de conductivité thermique λ, sont placées en x=0.







Refroidisseur à ailettes de microprocesseur
avec son ventilateur

En fonctionnement, l'appareil est maintenu à la température T_0. L'air extérieur, qui circule, est de température constante et uniforme T_a.
On se place en régime permanent et on suppose que la température dans l'ailette ne dépend que de x. Le flux surfacique passant de l'ailette à l'air ambiant est donné par la loi de Newton : $\varphi = h\,(T(x)-T_a)$, où $T(x)$ est la température locale de l'ailette et h le coefficient de transfert conducto-convectif air-ailette.

A.N. : a = 2,0 mm ; b = 10 cm ; c = 20 cm ; T_0 = 60°C ; T_a = 20°C ; λ = 16 W.m^{-1}.K^{-1} ; h = 150 W.m^{-2}.K^{-1}.

1°) Ecrire le bilan énergétique pour une tranche d'ailette entre x et $x + dx$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\theta(x)=T(x)-T_a$. On posera $\delta = \sqrt{\dfrac{\lambda a}{2h}}$; donner sa valeur numérique et son unité.

2°) Résoudre l'équation différentielle. En remarquant que $c \gg \delta$, on peut considérer que la plaque a une longueur infinie. En déduire une expression simplifiée de $T(x)$.
Tracer l'allure de son graphe et interpréter le sens physique de δ. Quelle est la longueur de la plaque c qu'a intérêt à choisir un industriel ?
3°) Calculer la puissance thermique totale P évacuée par l'ailette, puis la puissance thermique P' transmise par le boîtier de l'appareil à l'ailette en x=0. Commenter.
4°) Calculer le rendement η de l'ailette, càd le rapport des flux thermiques évacués par le boîtier de l'appareil à travers la surface $S = ab$, avec et sans ailette. On supposera que le coefficient de transfert conducto-convectif h est le même pour la paroi de l'appareil et pour l'ailette.
Quel est l'intérêt de l'ailette ? Pourquoi a-t-on intérêt à prendre une ailette de faible épaisseur ?
5°) Combien faudrait-il d'ailettes pour évacuer un flux thermique total de 200 W ?

5. Fusible et effet Joule

Un fusible est constitué d'un fil conducteur cylindrique d'axe (Ox), de section S, de longueur L, de masse volumique ρ et de capacité thermique c. Il possède une conductivité électrique γ et une conductivité thermique λ et est traversé par un courant électrique d'intensité I. Ce fil est entouré d'un isolant thermique et électrique. Les températures en x=0 et x=L sont imposées et égales à la température T_0 du milieu ambiant. On se place en régime permanent.

1°) Rappeler l'expression de la résistance électrique R d'un conducteur cylindrique de section S et de longueur L.
2°) Ecrire le bilan énergétique d'une tranche du conducteur entre x et x+dx. En déduire la température $T(x)$. Tracer $T(x)$.
3 °) Le matériau constituant le fil fond à T_f = 390K et on souhaite fabriquer un fusible qui admet une intensité maximale I_{max} = 16 A. Calculer l'aire S du fusible à prévoir. A.N.

A.N. : λ = 65 W.m^{-1}.K^{-1} ; γ = 1,2x10^{6} S.m^{-1} ; c= 460 J.K^{-1}.kg^{-1} ; ρ = 2,7x10^{3} kg.m^{-3} ; T_0= 290 K ; L= 2,5 cm.

6. Flux thermique à travers un cylindre

Un tuyau cylindrique de longueur L a un rayon intérieur R_1, un rayon extérieur R_2, et un coefficient de diffusion thermique λ. On suppose le tuyau assez long pour pouvoir négliger les effets de bord et on se place en régime stationnaire : la température à l'intérieur du tuyau $T(r)$ ne dépend donc que de la distance à l'axe du tuyau r. Les températures de la paroi intérieure et de la paroi extérieure du tuyau seront supposées constantes et égales à $T(R_1) = T_1$ et $T(R_2) = T_2$ avec $T_1 > T_2$.

On rappelle les expressions du gradient et du laplacien en coordonnées cylindriques pour une fonction $f(r)$: $\overrightarrow{grad}f(r) = \frac{df}{dr}\vec{u}_r$ et $\Delta f(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)$.

1°) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par la température $T(r)$. Déterminer $T(r)$ en fonction des données.

2°) En déduire l'expression du flux thermique à travers la surface d'un cylindre de rayon r ($R_1 < r < R_2$) et de longueur L. Indiquer la direction de ce flux. Donner l'expression de la résistance thermique du tuyau.

7. Rayonnement solaire et effet de serre

On considérera dans tout le problème que le Soleil et la Terre se comportent comme des corps noirs.

1°) Calculer la température à la surface du Soleil T_S sachant que le maximum du spectre qu'il émet est situé à λ_m = 500 nm. En déduire P_S la puissance totale rayonnée par le Soleil.

2°) Calculer la puissance surfacique émise par le Soleil au niveau de l'orbite terrestre. En déduire P_0 la puissance reçue par la Terre en provenance du Soleil et T_0 la température à la surface de la Terre à l'équilibre radiatif.

3°) En réalité, la Terre réfléchit une partie de l'énergie qu'elle reçoit de la part du Soleil et absorbe le reste. La fraction réfléchie s'appelle l'albédo que l'on note A = 0,3. Recalculer T_0 la température d'équilibre à la surface de la Terre en tenant compte de l'albédo. Commenter.

En fait, le rôle de l'atmosphère ne peut être omis. En effet, l'atmosphère renvoie vers la Terre une partie de l'énergie rayonnée par celle-ci : c'est l'effet de serre. On propose un modèle simple prenant en compte cet effet.

Dans ce modèle, l'atmosphère absorbe la fraction α = 0,33 du rayonnement solaire et absorbe complètement le rayonnement terrestre. Par ailleurs, elle émet vers la Terre et vers l'Espace. Quant à la Terre, elle absorbe le reste du rayonnement solaire et le rayonnement de l'atmosphère vers la Terre.

On modélisera l'atmosphère par une couche d'épaisseur $e \ll R_T$ et on supposera qu'elle se comporte comme un corps noir à la température T_a. On notera T_0' la température d'équilibre de la Terre et on prendra le même albédo A pour l'ensemble Terre-Atmosphère que pour la Terre seule.

4°) Expliquer pourquoi l'atmosphère absorbe peu le rayonnement solaire et une bonne partie du rayonnement terrestre.

5°) Effectuer un bilan thermique pour le sol et pour l'atmosphère à l'équilibre radiatif. En déduire T_a et T_0'. Conclure.

On donne : la loi de Wien $\lambda_m T$ = 2898 μm.K ; constante de Stefan : $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}$ W.m^{-2}.K^{-4} ; rayon de la Terre R_T = 6 378 km ; rayon du Soleil : $R_S = 6{,}96 \times 10^{8}$ m ; distance moyenne actuelle Terre-Soleil : $D = 1{,}496 \times 10^{11}$ m.

8. Température d'une gourde

Nous considérons une gourde sphérique de rayon R se comportant comme un corps noir. Elle est exposée au rayonnement de l'atmosphère correspondant à la température de rayonnement d'un corps noir, T_0 le jour et T_0' la nuit. De jour, elle est aussi exposée au rayonnement solaire de puissance surfacique φ_S. Nous négligerons les transferts thermiques autres que radiatifs.

Quelle est la température T de la gourde à l'équilibre, le jour et la nuit ?

On donne : T_0 = 280K ; T_0' = 270K ; φ_S = 900 W.m^{-2}.

Exercices supplémentaires

9. Isolation d'une maison *(pour s'entraîner, proche des TD)*

Le mur extérieur d'une maison est constitué de briques. Il est sans ouverture et mesure h = 6 m de hauteur, L = 10 m de longueur et e = 20 cm d'épaisseur. La température extérieure est de T_{ext} = 0°C, celle de la maison étant maintenue à T_{int} = 20°C.

a) La conductivité thermique de la brique est λ_b = 0.67 $W.m^{-1}.K^{-1}$. Calculer la résistance thermique du mur et le flux thermique à travers le mur.

b) Pour diminuer les déperditions thermiques, on isole le mur avec du polystyrène d'épaisseur e_1 = 45 mm et de conductivité thermique λ_p = 0.029 $W.m^{-1}.K^{-1}$. Calculer le nouveau flux thermique.

c) Quel serait ce flux thermique si le mur était constitué de deux parois en brique d'épaisseur e_2 = 8 cm chacune et séparées par une couche d'air d'épaisseur e'_2 = 4 cm ? On supposera que l'air reste immobile entre les deux parois et on donne la conductivité thermique de l'air : λ_{air} = 0.025 $W.m^{-1}.K^{-1}$. Commenter.

10. Mesure de conductivité thermique *(pour s'entraîner, proche des TD)*

L'énoncé et le corrigé sont en ligne : annale 2011 du concours CCP-L2-Deug.

11. Diffusion thermique dans un combustible nucléaire *(pour s'entraîner, proche des TD)*

L'énoncé et le corrigé sont en ligne : annale 2005 du concours CCP-L2-Deug.

12. Température d'une cave *(plus difficile)*

Une cave à vin a été creusée profondément dans un sous-sol crayeux. On se propose ici d'étudier l'évolution annuelle de la température $T(z,t)$ dans le sol à une profondeur z et à une date t. On modélise la température de surface par :

$$T(0,t) = T_m + acos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)$$

Données : $\lambda_{sol} = 1.1 W.m^{-1}.K^{-1}$, $c_{V,sol} = 900 J.kg^{-1}.K^{-1}$ et $\mu_{sol} = 2300 kg.m^{-3}$.

1. Donner la valeur de la période τ et un ordre de grandeur de T_m et a, tout d'abord dans le cas des variations diurnes, puis saisonnières.
2. Rappeler sans démonstration l'équation de diffusion vérifiée par $T(z,t)$ et chercher une solution de la forme :
$$T(z,t) = T_m + a\mathcal{R}e\left[e^{i(\omega t - \underline{k}z)}\right]$$
3. Mettre le résultat sous forme réelle, représenter la température en fonction de la profondeur z et commenter dans les deux cas précédents. A votre avis, la température des grottes en Afrique équatoriale est-elle la même qu'en France ?

13. Cuisson d'une dinde *(petite question)*

Une dinde de 2.5 kg cuit dans un four en 1h30. En supposant la dinde sphérique, comment le temps de cuisson varie-t-il avec la masse de la dinde ? En déduire le temps de cuisson d'une dinde de 3.5 kg.

Comment le temps de cuisson varie-t-il en fonction de la masse dans le cas d'un gâteau et d'une merguez ?

Que pensez-vous des lois de cuisson du type « tant de mn par kg » généralement proposées dans les manuels de cuisine ?

14. Pertes par rayonnement *(petite question)*

Evaluer les pertes énergétiques quotidiennes par rayonnement d'un être humain nu dans une pièce à température T_a = 23°C.

Exercices supplémentaires avec diffusion à 3 dimensions

(hors programme mais recommandés pour les CUPGE)

15. Température dans un igloo *(symétrie sphérique)*

On considère un igloo en forme de demi-sphère de rayon R = 1,5 m et d'épaisseur e = 20 cm ($e \ll R$) et de conductivité thermique λ = 0,05 $W.m^{-1}.K^{-1}$. Un esquimau dans l'igloo dégage une puissance thermique P = 75 W. On négligera les échanges thermiques avec le sol.

Calculer la température à l'intérieur de l'igloo T_{int} pour une température extérieure T_{ext}.

A.N. : T_{ext} = - 5°C, -10°C et -20°C.

16. Barreau de combustible nucléaire *(symétrie cylindrique)*

L'énoncé et le corrigé sont en ligne : annale 2012 du concours CCP-L2.

17. Conduction thermique entre deux sphères *(symétrie sphérique)*

Considérons un matériau homogène compris entre deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) et de conductivité thermique λ. Les parois de ce matériau sont maintenues aux températures T_1 ($r = R_1$) et T_2 ($r = R_2$), avec $T_1 > T_2$.

1°) Déterminer en régime permanent, la température $T(r)$ en tout point du matériau.

2°) Calculer sa résistance thermique en fonction des données.