TD n^{o}1 : Equations de Maxwell

Canal du cours sur Teams : `Electromagnétisme 2` dans l'équipe `LICENCE3-PetPC/2022-2023`
Site web du cours : `http://cpinettes.u-cergy.fr/L3-Electromag.html`.

Test de cours n°1 [*à faire à la maison*]

1. Ecrire les équations de Maxwell, en définissant toutes les grandeurs qui y figurent.

   Les équations de Maxwell se démontrent-elles ?

   Quelles sont les 2 propriétés mathématiques fondamentales des équations de Maxwell ?

   Commenter chaque équation de Maxwell.

2. Ecrire les formes intégrales des équations de Maxwell, en précisant soigneusement les domaines d'intégration et les règles d'orientation.

3. Ecrire les formes locales et intégrales de l'équation de la conservation de la charge et les commenter.

   Retrouver l'équation de conservation de la charge à partir des équations de Maxwell.

4. Quel est le sens physique du courant de déplacement ? S'agit-il d'un courant mesurant un déplacement macroscopique de charges ?

5. Qu'est-ce que l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS) ? Quel est son sens physique ?

   Que deviennent les équations de Maxwell dans l'ARQS ? Que peut-on en conclure ?

   Que devient l'équation de conservation de la charge dans l'ARQS ? Que peut-on en conclure ?

   A-t-on raison de se placer dans l'ARQS en TP d'électricité ?

6. [Complément, pas au programme] *Les lois de Coulomb et de Biot et Savart sont-elles toujours valables en régime variable ?*

7. Quelles sont les propriétés d'invariance et de symétrie : du champ électrostatique ? du champ magnétostatique ? du champ électromagnétique en régime variable ?

8. Rappeler les définitions des potentiels associés au champ électromagnétique. Ces potentiels sont-ils uniques ?

Ex. 1 : Formules pouvant rendre des services [*à faire à la maison*]

Démontrer les formules suivantes :

[(1) est à connaître par coeur et il faut savoir retrouver (3) à (8) via l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$]

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\ \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\ \vec{C} \tag{1}$$

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\ \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\ \vec{A} \tag{2}$$

$$\vec{\text{grad}}\ (fg) = f\ \vec{\text{grad}} g + g\ \vec{\text{grad}} f \tag{3}$$

$$\text{div}\left(f\vec{A}\right) = f\ \text{div}\vec{A} + \vec{\text{grad}} f \cdot \vec{A} \tag{4}$$

$$\vec{\text{rot}}\left(f\vec{A}\right) = f\ \vec{\text{rot}}\vec{A} + \vec{\text{grad}} f \wedge \vec{A} \tag{5}$$

$$\vec{\text{rot}}\ \left(\vec{\text{grad}} f\right) = \vec{0} \tag{6}$$

$$\text{div}\ \left(\vec{\text{rot}}\vec{A}\right) = 0 \tag{7}$$

$$\vec{\text{rot}}\ \vec{\text{rot}}\left(\vec{A}\right) = \vec{\text{grad}}\left(\text{div}\vec{A}\right) - \Delta\vec{A} \tag{8}$$

$$\text{div}\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}}\vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\text{rot}}\vec{B} \tag{9}$$

$$\vec{\text{rot}}\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \vec{A}\ \text{div}\vec{B} - \vec{B}\ \text{div}\vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{B} \tag{10}$$

Que deviennent les formules précédentes dans le cas où $f = \lambda = \text{cste}$?

Ex. 2 : Le gradient [*à faire à la maison*]

1. Retrouver l'expression du gradient en coordonnées sphériques à partir de la définition du gradient.
2. Montrer que $\vec{\text{grad}}\ [f(r)] = \dfrac{df}{dr}\ \vec{u}_r$, où $r = \|\vec{r}\|$.

Ex. 3 : Champ électrique induit par un solénoïde

Un solénoïde très long, constitué de n spires par unité de longueur bobinées sur un cylindre de rayon R et d'axe Oz, est parcouru par le courant $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$. On se placera dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

[*On admettra que ce champ électrique variable obéit aux mêmes règles de symétrie qu'un champ électrostatique et qu'il est continu en tout point*]

1. Calculer le champ magnétique créé par le solénoïde en tout point de l'espace.
2. Expliquer pourquoi le courant variable $i(t)$ est source d'un champ électrique. Par des arguments de symétrie et d'invariance, que peut-on dire du champ électrique induit $\vec{E}(M, t)$ en un point M de l'espace ?
3. Calculer le champ électrique induit par ce solénoïde. Le faire par les formes globales, puis par les formes locales des équations de Maxwell.

Ex. 4 : Sphère radioactive

Une sphère radioactive, de rayon R, émet des particules chargées de façon isotrope dans tout l'espace. On note $Q(r,t)$ la charge contenue à l'instant t dans une sphère de rayon $r > R$.

1. Calculer le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ et le champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ en un point M quelconque, extérieur à la sphère radioactive.
2. Retrouver la forme locale de l'équation de conservation de la charge électrique à partir des équations de Maxwell. En déduire sa forme globale.
3. Calculer le vecteur densité de courant volumique $\vec{j}(M,t)$ en un point M quelconque, extérieur à la sphère radioactive. Vérifier que vos résultats sont bien compatibles avec l'équation de Maxwell-Ampère.

Ex. 5 : Potentiel vecteur d'un champ uniforme

Soit $\vec{a}$ un vecteur constant, on considère le champ de vecteurs suivant : $\vec{A} = \vec{a} \wedge \vec{r}$.

Calculer $\vec{\text{rot}}\vec{A}$ et $\text{div}\vec{A}$. En déduire une expression pour le potentiel vecteur d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0$.

Ex. 6 : Le fil cylindrique

Un conducteur cylindrique, de rayon R et de dimension infinie selon l'axe Oz, est parcouru par un courant d'intensité constante I. La distribution de courant est donnée par une densité volumique de courant uniforme $\vec{j} = j\ \vec{u}_z$.

[*On admettra qu'en régime permanent, le potentiel vecteur obéit aux mêmes règles de symétrie qu'un champ électrostatique et qu'il est continu partout pour une distribution volumique de courant*]

1. Exprimer j en fonction de I.
2. Calculer le champ magnétique et proposer un potentiel vecteur en tout point de l'espace. Le faire par les formes globales, puis par les formes locales des équations de Maxwell.

CY Cergy Paris Université 2022-2023
Electromagnétisme 2
L3 - P et PC

TD n^o 2 : Energie électromagnétique

Test de cours n°2 (*à faire à la maison*)

1. Quelle est la définition et signification physique de la densité volumique d'énergie électromagnétique ? Son unité SI ? Que représente physiquement sa dérivée par rapport au temps ?
2. Quelle est la définition et signification physique du vecteur de Poynting ? Son unité SI ? Ecrire l'expression de la puissance rayonnée à l'instant t à travers une surface S. Donner la définition de l'intensité lumineuse.

   Citer des grandeurs physique analogues au vecteur de Poynting et à la puissance rayonnée à travers une surface vues en L2.
3. Ecrire les formes locales et intégrales de l'éq. de conservation de l'énergie em dans le vide. Donner le sens physique des différents termes.
4. Démontrer l'expression de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique à la matière.
5. Peut-on calculer l'énergie d'une onde em en utilisant la notation complexe ?
6. Pourquoi calcule-t-on toujours la moyenne temporelle des grandeurs énergétiques ?
7. Quelle est, dans l'ARQS, l'expression de l'énergie électromagnétique stockée dans un condensateur de capacité C ? dans un solénoïde d'inductance L ?
8. Quelle est l'expression de la puissance dissipée par effet Joule dans un conducteur ohmique de conductivité électrique γ et de volume V ?

Ex. 1 : Energie stockée dans un condensateur plan et dans un solénoïde

En négligeant les effets de bord, montrer que la densité d'énergie stockée :

a) dans un condensateur plan est $\dfrac{\epsilon_o E^2}{2}$ b) dans un solénoïde est $\dfrac{B^2}{2\mu_o}$

[On rappelle que l'inductance d'un solénoïde très long composé de n spires par unité de longueur, de section S et de longueur l vaut : $L = \mu_0 n^2 S l$]

Ex. 2 : Rayon classique de l'électron (*à faire à la maison*)

D'après la relativité, l'énergie E d'une particule dans son référentiel propre est liée à sa masse par la relation $E = mc^2$.

a) En considérant que l'électron est une sphère uniformément chargée en volume, quel rayon lui attribue-t-on si l'on assimile E à l'énergie électrostatique ? Commenter.

b) La même démarche appliquée au cas du proton est-elle satisfaisante ?

On donne : $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg ; $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \times 10^9$ USI.

Ex. 3 : Bilan énergétique dans un conducteur ohmique

On considère un cylindre conducteur, de conductivité électrique γ, d'axe Oz, de longueur infinie et de rayon R, parcouru par un courant permanent d'intensité I, uniformément réparti sur sa section.

1. Calculer la résistance R_l d'une portion du conducteur cylindrique de longueur l.
2. Calculer le champ magnétique à l'intérieur du conducteur.
3. Calculer le vecteur de Poynting à la surface du conducteur.
4. Calculer le flux du vecteur de Poynting à travers les parois d'une portion e longueur l du conducteur.
5. Etablir un bilan de puissance électromagnétique sur la portion de longueur l du conducteur. Conclure.

Ex. 4 : Bilan énergétique de la charge d'un condensateur

Un condensateur plan possède des armatures circulaires de rayon R situées à une distance e l'une de l'autre. Il constitue un système de symétrie cylindrique d'axe Oz avec les fils d'amenée du courant. On s'intéresse à l'opération de charge de ce condensateur et on désigne par $q(t)$ la charge portée par l'armature inférieure à l'instant t. On suppose que la charge du condensateur s'effectue lentement dans le temps pour que l'on puisse supposer que le champ électrique est uniforme entre les armatures. On désigne par S_l la surface du cylindre de rayon R s'appuyant sur le bord des armatures, et on suppose $R \gg e$ de sorte que l'on peut négliger les effets de bord.

1. Calculer le champ électrique entre les armatures en fonction de $q(t)$ et des paramètres géométriques.
2. Même question pour le champ magnétique.
3. Calculer le vecteur de Poynting et son flux à travers S_l. Interpréter.

Ex. 5 : Chauffage par induction *(suite de l'Ex. 3 du TD n° 1)*

On considère le solénoïde de l'Ex. 3 du TD n° 1 et on reprendra les résultats de cet exercice.
On place en son centre O un cylindre métallique, de même axe, de longueur L, de rayon $a < R$ et de conductivité électrique γ.

1. Expliquer le principe du chauffage par induction.
2. Calculer le vecteur densité de courant volumique qui apparaît dans le cylindre conducteur, en négligeant le champ magnétique créé par les courants induits. En déduire la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans ce cylindre.

TD n^{o}3 : Ondes électromagnétiques dans le vide

Test de cours n°3 [*à faire à la maison*]

1. Ecrire les équations de propagation du champ électromagnétique dans le vide et leur célérité. Le démontrer.
2. Quelles sont les principales solutions particulières de l'équation de propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu vide de charge et de courant ? Expliciter leur structure détaillée et discuter leurs propriétés.
3. Préciser parmi les ondes em suivantes dans le vide si ce sont des ondes : planes ? progressives ? monochromatiques (ou harmoniques) ? Préciser les plans d'onde et la direction de propagation le cas échéant.
   (a) $\vec{E}(M,t) = E_0 \exp(-z/\delta)\cos(\omega t - kz)\ \vec{u}_x$
   (b) $\vec{E}(M,t) = E_0 \sin(\alpha z)\cos(\omega t - kx)\ \vec{u}_y$
   (c) $\vec{E}(M,t) = E_0 \exp\left(\dfrac{t - z/c}{\tau}\right)\ \vec{u}_x$
   (d) $\vec{E}(M,t) = E_0 \sin(kz)\sin(\omega t)\ \vec{u}_x$
   (e) $\vec{E}(M,t) = E_0\ [\cos(\omega t - kz) - \cos(\omega t + kz)]\ \vec{u}_x$
4. Soit une OPPM dont le champ électrique a pour expression complexe : $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0\ e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$. Quels sont, en notation complexe, les équivalents des opérateurs : $\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\vec{\nabla}$, div, $\vec{\text{rot}}$ et Δ ?
   En déduire les équations de Maxwell dans le vide en notation complexe.
   Que se passe-t-il si on choisit l'autre convention de phase : $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0\ e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$?
5. Qu'est-ce que la relation de dispersion ? Comment l'obtient-on ?
   Retrouver la relation de dispersion dans le vide.
6. Rappeler la relation de structure des OPPM dans le vide et la démontrer. Donner toutes les propriétés des OPPM dans le vide qu'on peut en déduire.
7. Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique et le vecteur de Poynting dans le cas d'une OPPM dans le vide.
   Discuter la répartition de l'énergie électromagnétique sous forme électrique et magnétique.
   Quelle est la relation entre la densité volumique d'énergie électromagnétique et le vecteur de Poynting ?

8. Calculer la puissance reçue par un élément de surface irradié par une OPPM électromagnétique sous incidence θ.
9. A quelle vitesse se déplace l'énergie d'une OPPM dans le vide ? Le démontrer.
10. Les OPPM peuvent-elles décrire des ondes réelles ? Quel est l'intérêt des OPPM ? Qu'est-ce qu'un paquet d'ondes ?
11. Qu'est-ce que la vitesse de phase ? Et la vitesse de groupe ? Donner leurs sens physiques. Peut-on obtenir une vitesse de phase ou une vitesse de groupe supérieure à c ?
12. Qu'est-ce qu'un milieu non-dispersif ? dispersif ?
13. Justifier pourquoi l'amplitude d'une onde sphérique décroît en $1/r$?
14. [Complément, pas au programme] *Etablir les équations de propagation vérifiées les potentiels ϕ et $\vec{A}$ dans le vide. Que deviennent ces équations avec le choix de jauge de Lorentz qui relie les potentiels selon :* $\mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ *?*

Ex. 1 : Onde électromagnétique dans le vide [*questions de cours*]

On se place dans le vide en absence de toute sources.

1. Rappeler les équations de Maxwell. Etablir les équations de propagation des champs électrique et magnétique. En déduire la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide.
2. On considère une OPPM dont le champ électrique est donné par :

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \, \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

   où $\vec{E}_0$ et $\vec{k}$ sont deux vecteurs constants réels.

   (a) Pourquoi cette onde est plane ? progressive ? monochromatique ?
   (b) Quelle est la direction et le sens de propagation de cette onde électromagnétique ? Et sa direction de polarisation ?
   (c) Ecrire les éq. de Maxwell vérifiées par cette onde en fonction de $\vec{k}$ et ω.
   (d) En déduire la structure et la relation de dispersion de cette onde. Quelle est la vitesse de phase de cette onde ? Commenter.
   (e) Calculer le champ magnétique de cette onde.
   (f) Calculer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à l'onde.
   (g) Calculer le vecteur de Poynting de cette onde électromagnétique et sa moyenne temporelle. En déduire la vitesse et la direction de propagation de l'énergie électromagnétique.

Ex. 2 : Onde électromagnétique plane progressive [*à faire à la maison*]

On étudie une onde électromagnétique dont le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E} = E_x\, \vec{u}_x + E_y\, \vec{u}_y \qquad \text{avec} \qquad \underline{E}_x = E_0 \exp i\ [\ \frac{k}{3}(2x + 2y + z) - \omega t\ ]$$

L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde vaut $\lambda = 6 \times 10^{-7}$ m.

1. Exprimer E_y en fonction de E_x.
2. Calculer numériquement la fréquence de l'onde et la constante k.
3. Etablir l'équation d'un plan d'onde.
4. Déterminer le champ $\vec{B}$.
5. Calculer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à l'onde.
6. Calculer le vecteur de Poynting de cette onde et sa moyenne temporelle. En déduire la vitesse et la direction de propagation de l'énergie électromagnétique.

Ex. 3 : Onde stationnaire [*à faire à la maison*]

On superpose, dans le vide, deux OPPM polarisées rectilignement, dont les champs électriques s'écrivent ;

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y \qquad \text{et} \qquad \vec{E}_2 = E_0 \cos(\omega t + kx)\vec{u}_y$$

1. Quel est le sens de propagation de ces ondes ? Que vaut k ?
2. Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ résultant de la superposition de ces deux ondes. L'onde globale est-elle une OPPM ? Existe-t-il des points où le champ $\vec{E}$ est nul à chaque instant ? Représenter qualitativement $E(x,t)$ à $t = 0$, $T/4$, $T/2$ et $3T/4$, T étant la période des oscillations de $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$.
3. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ de l'onde globale.
   Existe-t-il des points où le champ $\vec{B}$ est nul à chaque instant ? Comparer les ondes $B(x,t)$ et $E(x,t)$.
4. En déduire le vecteur de Poynting de l'onde résultante et sa moyenne temporelle. Commenter.

Ex. 4 : Onde cylindrique

Une onde électromagnétique émise par des sources placées le long d'un axe Oz possède une structure cylindrique. En coordonnées cylindriques, le champ électrique d'une onde divergente, monochromatique et polarisée suivant l'axe Oz, possède une amplitude $E(r)$ fonction de la distance à l'axe. En notation complexe, on écrira :

$$\underline{\vec{E}} = E(r) \exp i(\omega t - kr) \vec{u}_z,$$

où $E(r)$ est réel. Il s'agit de déterminer la variation de $E(r)$ en fonction de r.

1. Déterminer le champ magnétique.
2. Quelle est la valeur moyenne dans le temps du vecteur de Poynting ? En déduire la puissance moyenne $< P >$ rayonnée par l'onde à travers un cylindre d'axe Oz, de hauteur h et de rayon r.
3. Comment cette puissance évolue-t-elle avec r ? En déduire $E(r)$ en fonction de r, $< P_h >$ (puissance par unité de longueur), k et ω.
4. Dans l'hypothèse $r \gg \lambda$ (champ lointain), montrer que localement, la structure de l'onde est celle d'une onde plane (on admettra que l'on a $\omega = kc$).

   [*A faire à la maison*] Montrer que la relation de dispersion s'écrit bien $\omega = kc$ dans ce cas et donner les expressions du champ électromagnétique.

On donne : $\vec{\mathrm{rot}}\, [U(r)\ \vec{u_z})] = -\dfrac{\partial U}{\partial r}\ \vec{u_\theta}$; $\quad \Delta\, [U(r)\ \vec{u_z})] = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r\dfrac{\partial U}{\partial r}\Big)\ \vec{u_z}.$

TD n^{o}4 : Polarisation d'une onde électromagnétique

Test de cours n°4 [*à faire à la maison*]

31. Comment est définie la polarisation d'une onde ?
32. Ecrire l'expression générale du champ électrique d'une OPPM polarisée quelconque se propageant dans le vide selon $+\vec{u}_z$. L'écrire aussi en notation complexe.

    Quelles conditions doivent vérifier les deux composantes de ce champ électrique pour avoir un état de polarisation : rectiligne ? circulaire ? elliptique ?
33. Expliquer pourquoi la lumière naturelle n'est pas polarisée. Comment peut-on décrire cette lumière ?
34. Préciser parmi les champs électriques suivants lesquels sont ceux d'une OPPM se propageant dans le vide polarisée : rectilignement ? circulairement ? elliptiquement ?

    On précisera la direction et le sens de propagation, la direction de la polarisation et le caractère droit au gauche de la polarisation de l'onde.

    (a) $\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\ \vec{u}_x$
    (b) $\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\ \vec{u}_y$
    (c) $\vec{E}(M,t) = E_0\ [\cos(\omega t - kx)\ \vec{u}_y - 2\ \cos(\omega t - kx)\ \vec{u}_z]$
    (d) $\vec{E}(M,t) = E_0\ [\cos(\omega t - kx)\ \vec{u}_y + \sin(\omega t - kx)\ \vec{u}_z]$
    (e) $\vec{E}(M,t) = E_0\ [\cos(\omega t + kx)\ \vec{u}_y + \sin(\omega t + kx)\ \vec{u}_z]$
    (f) $\vec{E}(M,t) = E_0\ [\cos(\omega t - kz)\ \vec{u}_x + 3\cos(\omega t - kz + \pi/4)\ \vec{u}_y]$
35. Qu'est-ce qu'un polariseur ? Rappeler le principe de fonctionnement des polaroïds, qui sont les polariseurs les plus courants. Quel est l'état de polarisation à la sortie du polaroïd pour une lumière naturelle arrivant perpendiculairement au film polarisant ?
36. Qu'est-ce qu'un analyseur ?

37. Enoncer la loi de Malus. La loi de Malus est en général établie dans le cas d'une OPPM. Justifier pourquoi cette loi est valable aussi dans le cas des ondes réelles polychromatiques.
38. Pourquoi les polaroïds sont-ils gris en éclairage naturel ? En réalité l'intensité de lumière naturelle traversant un polaroïd est inférieure à la moitié de l'onde incidente. Pourquoi ?
39. Comment déterminer rapidement la direction de transmission d'un polariseur à l'aide d'une surface réfléchissante et d'une lumière inclinable ?
40. Que se passe-t-il si on observe le ciel par beau temps avec un polaroïd ?
41. Qu'est-ce qu'un milieu optiquement anisotrope ? Et un milieu biréfringent ?
42. Rappeler le principe de fonctionnement des lames à retard. Qu'est-ce qu'on appelle axe rapide et axe lent d'une lame à retard ? Pourquoi appelle-t-on aussi ces axes des lignes neutres ?

    Qu'est-ce qu'une lame quart d'onde ? demi-onde ? Ces lames sont-elles quart d'onde ou demi-onde pour toutes les longueurs d'onde ?
43. Quel est l'effet d'une lame demi-onde puis d'une lame quart d'onde sur des états de polarisation rectiligne et circulaire ?
44. Quel est l'effet d'une lame demi-onde puis d'une lame quart d'onde sur une lumière non polarisée ?
45. On considère une onde plane progressive harmonique électromagnétique se propageant suivant la direction Oz dans un milieu possédant trois axes de symétrie orthogonaux Ox, Oy, Oz. La direction de polarisation initiale de l'onde est à 45° des axes Ox, Oy. Les indices optiques n_x et n_y du milieu sont différents suivants les deux directions Ox et Oy ($n_x > n_y$ par exemple). Quelle est la polarisation de l'onde en sortie dans le cas où le déphasage entre les composantes E_x et E_y du champ électrique est de : $0\ [2\pi]$? $\pi/2\ [2\pi]$? $\pi\ [2\pi]$?

    La réponse sera faite à l'aide d'une construction graphique.
46. Citer plusieurs manières de polariser de la lumière
47. Citer des applications de la polarisation dans la vie courante.
48. Quel est l'intérêt d'utiliser des lunettes 3D à polarisation circulaire plutôt que rectiligne ? Pourquoi faut-il un écran spécial pour le cinéma 3D ?

Ex. 1 : Rotation d'une polarisation linéaire

Une onde électromagnétique plane, monochromatique et polarisée selon Ox, se propage dans le vide selon $\vec{u}_z$. On désigne par E_0 l'amplitude du champ électrique, k la norme du vecteur d'onde et ω la pulsation.

1. Donner l'expression du champ électrique.
2. On place sur le trajet du faisceau lumineux un polariseur orienté pour transmettre une polarisation rectiligne perpendiculaire à Oz et faisant un angle α par rapport à $\vec{u}_x$. On notera φ_0 le déphasage dû à la traversée du polariseur.

   (a) Donner l'expression du champ électrique de l'onde après la traversée du polariseur.

   (b) En comparant la densité volumique d'énergie électromagnétique moyenne véhiculée par l'onde après le polariseur et avant le polariseur, donner l'expression du coefficient de transmission en énergie T du polariseur. Quelle est la perte d'énergie de l'onde à la traversée du polariseur ?

3. On place maintenant sur le trajet de l'onde N polariseurs en série. Le polariseur n est orienté pour transmettre une polarisation rectiligne formant un angle $n\alpha$ par rapport à la polarisation initiale de l'onde.

   (a) Quel est le coefficient de transmission en énergie après traversée des N polariseurs ?

   (b) On choisit dans toute la suite $\alpha = \pi/2N$. Quel est l'état de polarisation finale de l'onde transmise ? Montrer que, pour une valeur de N suffisamment grande, le dispositif permet de faire tourner une polarisation rectiligne de $\pi/2$ avec une perte d'énergie négligeable.

   (c) Combien de polariseurs faut-il utiliser pour que les pertes d'énergie de ce système soient inférieures à 1% ?

Ex. 2 : Effet d'un polariseur linéaire sur une lumière naturelle

On définit l'intensité I d'une onde électromagnétique par la moyenne (dans le temps) de la norme du vecteur de Poynting.

1. Calculer l'intensité I_1 d'une onde électromagnétique plane, progressive, mono-chromatique et polarisée rectilignement.
2. On envoie cette onde électromagnétique sur un polariseur dont l'axe de polarisation est perpendiculaire à la direction de propagation et fait un angle α avec la direction de polarisation de l'onde incidente. Exprimer l'intensité lumineuse I_2 à la sortie du polariseur en fonction de l'intensité I_1 à l'entrée du polariseur (loi de Malus en optique).

3. La lumière naturelle est une onde plane progressive quasi-monochromatique non polarisée. On la modélisera par un champ électrique dont les composantes ont même amplitude mais un déphasage aléatoire. On supposera que ce déphasage varie sur une durée grande devant la période de l'onde, mais petite devant le temps de réponse de l'oeil.

   (a) Ecrire le champ électrique de l'onde lumineuse.

   (b) On envoie cette onde sur un polariseur d'axe Ox. Exprimer l'intensité lumineuse après le polariseur I_2 en fonction de celle avant polariseur I_1.

Ex. 3 : Lunettes 3D

Les lunettes 3D actuelles sont des lunettes à polarisation circulaire. Chaque verre est en fait une juxtaposition de deux éléments, une lame quart d'onde (côté écran) et un polariseur rectiligne (côté oeil). Les lames quart d'onde retardent la composante du champ électrique selon l'axe Ox de $\pi/2$ par rapport à celle selon Oy (Oz étant la direction de propagation de la lumière).
Cette propriété vient de ce que ces lames sont taillées dans un matériau transparent anisotrope dit biréfringent : la vitesse de la lumière dans ces matériaux varie selon la polarisation, ce qui introduit un déphasage entre les deux composantes du champ électrique. Pour les lames quart d'onde, on ajuste leur épaisseur pour avoir un déphasage de $\pi/2$.

1. Quel est l'effet de cette lame quart d'onde sur la lumière naturelle ?
2. Montrer que cette lame quart d'onde transforme une lumière polarisée circulairement en lumière polarisée rectilignement. Préciser la direction de polarisation pour une onde circulaire gauche et droite.

   Sachant qu'en 3D on projette deux images sur l'écran avec des polarisations circulaires différentes (droite et gauche), dans quelle direction est orienté le polariseur rectiligne à la sortie de la lame quart d'onde pour chaque verre de lunettes 3D ?
3. Montrer que cette lame quart d'onde transforme une lumière polarisée rectilignement à $\pm 45°$ en lumière polarisée circulairement.

Exo. 4 : Analyseur à pénombre (session 2 2020) *(à faire à la maison)*

On considère une OPPM (onde plane progressive monochromatique), de pulsation ω, d'amplitude E_0, se propageant dans le vide selon Oz. Elle arrive sous incidence normale sur un dispositif composé d'une lame demi-onde ($\mathscr{L}$) et/ou d'un polariseur rectiligne ($\mathscr{P}$). Les axes neutres de la lame sont orientés selon Ox et Oy. Lors de la traversée de la lame demi-onde par l'OPPM, un déphasage de $\pm\pi$ se produit entre la composante E_x et la composante E_y de l'onde.

1. Dans la première partie de l'exercice, l'onde traverse successivement la lame demi-onde puis le polariseur rectiligne. L'axe de passage du polariseur ($\mathscr{A}$) fait un angle +45° avec l'axe Ox (voir Fig.1).

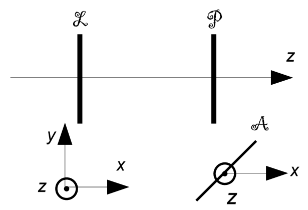

Fig.1

a) L'OPPM arrivant sur $\mathscr{L}$ est de polarisation circulaire droite (PCD). Écrire l'expression du champ électrique avant $\mathscr{L}$ (E_1), entre $\mathscr{L}$ et $\mathscr{P}$ (E_2), puis après $\mathscr{P}$ (E_3). Justifier chaque expression et préciser dans chaque cas l'état de polarisation de l'onde. Recopier la Fig.1. Dessiner la polarisation de l'OPPM avant $\mathscr{L}$, entre $\mathscr{L}$ et $\mathscr{P}$, puis après $\mathscr{P}$, en respectant que l'axe Oz est orienté hors feuille ($\odot$).

b) L'OPPM arrivant sur $\mathscr{L}$ est polarisée rectilignement de telle manière que l'angle entre sa polarisation et l'axe Ox vaut α ($0 < \alpha < \pi/2$). Répondre aux mêmes questions qu'en a).

c) Quel est l'effet de la lame demi-onde sur une lumière non polarisée ? Justifier votre réponse.

2. Pour améliorer la précision de la détermination d'une polarisation rectiligne, on utilise un dispositif comprenant 2 zones occupant chacune un demi-disque (voir Fig.2) : une zone 1 constituée d'un polariseur rectiligne $\mathscr{P}$ et une zone 2 constituée de la même lame demi-onde que précédemment ($\mathscr{L}$) suivie du même polariseur rectiligne $\mathscr{P}$. L'axe du polariseur $\mathscr{P}$ fait un angle $\varepsilon > 0$ (petit, de l'ordre de 1°) avec l'axe Ox. L'OPPM arrivant sur $\mathscr{L}$ est polarisée rectilignement de telle manière que l'angle entre sa polarisation et l'axe Ox vaut α ($0 < \alpha < \pi/2$).

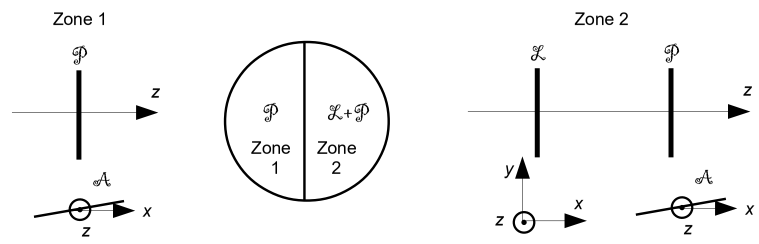

Fig.2

a) On rappelle que l'intensité d'une onde électromagnétique I est proportionnelle au carré de l'amplitude du champ électrique et que le facteur de proportionnalité est constant dans cette expérience. On notera I_0 l'intensité de l'onde incidente. Déterminer les intensités I_1 et I_2 de l'onde issue de la zone 1 et 2 respectivement en fonction de I_0, α et ε.

b) En déduire les deux conditions sur l'angle α pour lesquelles on a $I_1 = I_2$. Distinguer le cas correspondant à un fort éclairement de celui correspondant à un éclairement faible. Dans le cas où l'éclairement des deux zones est le même et faible, comment varient les intensités I_1 et I_2 lorsqu'on fait tourner la polarisation de l'onde incidente très légèrement de $\pm\varepsilon$?

c) Sachant que l'oeil humain est plus sensible à un faible éclairement qu'à un fort éclairement, expliquer l'intérêt de ce dispositif.

Rappel :

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- la composante d'un vecteur $\vec{A}$ selon $\vec{u}_{x'}$ peut être calculée comme $\vec{A}' = (\vec{A}\cdot\vec{u}_{x'})\vec{u}_{x'}$.

TD n^{o}5 : Propagation dans un milieu conducteur et à la frontière vide/conducteur

Test de cours n°5 [*à faire à la maison*]

1. Qu'est-ce qu'un conducteur ohmique ? Donner un ordre de grandeur de la conductivité électrique d'un métal.
2. Comment modélise-t-on la conduction électrique dans un métal (modèle classique de Drude) ?
3. Rappeler l'expression de la résistance électrique d'une portion de fil d'un conducteur ohmique de conductivité électrique γ, longueur ℓ, section S.
4. Quelle est la puissance volumique reçue par un conducteur ohmique soumis à un champ $\vec{E}$?
5. Ecrire sans démonstration les équations de Maxwell simplifiées dans un conducteur ohmique excité à basse fréquence ($f \ll 10^{14}$ Hz).
6. Ecrire la condition sur le temps d'évolution T du champ électrique dans un conducteur ohmique de conductivité réelle γ dans l'ARQS. Cette condition est-elle satisfaite dans le domaine fréquentiel $f \ll 10^{14}$ Hz, où les métaux ont une conductivité réelle de l'ordre de $\gamma \simeq 10^7$ S.m^{-1} ?
7. Les équations de propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur ohmique de conductivité électrique γ dans le cadre de l'ARQS sont des équations de d'Alembert. Vrai ou faux ?
8. Qu'est-ce que l'effet de peau dans les conducteurs ohmiques ? Citer des applications pratiques de l'effet de peau.
9. Qu'est-ce qu'un conducteur ohmique parfait ? Comment les champs se réfléchissent-ils sur un conducteur ohmique parfait ?
10. Quelle est la différence entre atténuation et absorption ?
11. Par quoi est caractérisé un milieu absorbant ? Citer un exemple.
12. *[Complément, pas au programme] Qu'est-ce qu'une onde évanescente ?*
13. Ecrire les relations de passage du champ électromagnétique entre deux milieux 1 et 2 quelconques.
14. Ecrire les relations de passage du champ électromagnétique entre un conducteur parfait et le vide.
15. Une onde incidente $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kz)\, \vec{u}_x$ arrive en incidence normale sur un conducteur parfait qui occupe le demi-espace $z > 0$. Donner l'expression du champ réfléchi $\vec{E}_r$, puis du champ électrique total dans la région $z < 0$.

16. *[Complément, pas au programme] Considérons une cavité électromagnétique formée par deux plans conducteurs parfaits en $x = 0$ et $x = L$, l'espace entre ces 2 plans étant de l'air. On cherche ses modes propres sous la forme d'onde plane stationnaire harmonique (OPSH) :*
$$\vec{E}(x,t) = E_0 \ \sin(kx + \psi) \ \cos(\omega t + \varphi) \ \vec{u}_y.$$
Déterminer les valeurs possibles de k et ψ.
17. Comment peut-on comprendre qualitativement la pression de radiation exercée sur un conducteur du point de vue électromagnétique ? et du point de vue corpusculaire ?
18. Qu'est-ce qu'un plasma ? Citer des exemples de plasmas. Pourquoi peut-on négliger la contribution des ions à la conductivité ? Quelles sont les ondes qui peuvent se propager dans un plasma ?

Ex. 1 : Onde électromagnétique dans un métal : effet de peau
[*à faire à la maison*]

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans un très bon conducteur ohmique (le cuivre) de conductivité γ. Le conducteur occupe le demi-espace $z > 0$ et on envoie sur le conducteur une onde électromagnétique de la forme :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp\left[i(\omega t - kz)\right]\vec{u}_x$$

On admettra que la loi d'Ohm reste valable dans les métaux pour des ondes de fréquence $f \leq 100$ GHz (ondes hertziennes).

1. Etablir l'équation satisfaite par la densité volumique de charges $\rho(M,t)$. Montrer que $\rho(M,t)$ tend rapidement vers 0.
2. Exprimer le rapport entre les densités volumiques de courant de déplacement et de conduction. Conclusion ?
3. Etablir l'équation de propagation du champ électrique. En déduire la relation de dispersion dans le métal.
4. En déduire la forme du champ $\underline{\vec{E}}$ dans le conducteur en fonction de :
$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma \mu_0 \omega}}$$
Interpréter physiquement δ.
Calculer sa valeur pour les différentes valeurs de f données pour l'A.N.
Que se passe-t-il dans la limite $\gamma \to +\infty$ (conducteur parfait) ?
5. Calculer la puissance volumique moyenne cédée par le champ électromagnétique au conducteur.
6. Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

7. Comment protège-t-on un studio radio des ondes extérieures ?

   Pourquoi met-on une plaque métallique derrière la vitre d'un four à micro-ondes ? Le fait qu'elle soit percée de trous, pour pouvoir voir l'intérieur du four, est-il gênant ?

A.N. : $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F.m^{-1} ; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H.m^{-1} ; $\gamma \simeq 6 \times 10^7$ Ω^{-1}.m^{-1} (cuivre) ; $f = 50$ Hz (réseau EDF), 200 kHz (radio GO), 100 MHz (radio FM) et 1 GHz (micro-ondes).

Ex. 2 : Propagation entre deux plans conducteurs parfaits

On considère deux plans conducteurs parfaits situés en $z = 0$ et $z = a$. On suppose que ces plans ont une extension très grande devant a et sont séparés par le vide.
On cherche à étudier la propagation d'une onde électromagnétique dans un tel système, dont le champ électrique est donné par :

$$\vec{E} = E_o \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos\left(\omega t - kx\right)\vec{u}_y$$

1. Montrer que que ce champ vérifie les conditions aux limites associées à un champ électrique.
2. Déterminer l'expression du champ magnétique de l'onde.
3. Déterminer la relation de dispersion du système. Montrer que la propagation n'est possible que pour des pulsations $\omega > \omega_c$ où l'on exprimera ω_c en fonction des paramètres du problème.

On se placera dans toute la suite du problème dans le cas $\omega > \omega_c$.

4. Calculer la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g de l'onde en fonction de ω. Tracer ces deux vitesses en fonction de ω. Les comparer à la vitesse de la lumière. Expliquer.
5. Déterminer l'énergie électromagnétique moyenne $\langle \mathcal{E}_{em} \rangle$ contenue dans un parallélépipède de volume $\Delta x \Delta y \Delta z$ avec $\Delta x = l$, $\Delta y = L$ et $\Delta z = a$.
6. Calculer la valeur moyenne dans le temps du vecteur de Poynting. En déduire le flux moyen $\langle \Phi \rangle$ correspondant à l'énergie transportée par l'onde à travers une section de hauteur a et de largeur L perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.
7. Montrer, qu'à partir de $\langle \mathcal{E}_{em} \rangle$ et $\langle \Phi \rangle$, on peut définir une vitesse de propagation de l'énergie v_e. Comparer cette vitesse à la vitesse de groupe v_g.
8. Montrer que l'on peut écrire le champ électrique comme la superposition de deux OPPM. Préciser les vecteurs d'onde $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ de ces deux ondes. Interpréter.

Ex. 3 : Réflexion sur un conducteur parfait : pression de radiation

Une OPPM polarisée selon Ox et se propageant dans le vide dans le sens des z croissants, rencontre un métal parfait en $z = 0$. On désigne par E_0 l'amplitude du champ électrique, k la norme du vecteur d'onde et ω la pulsation.

1. Ecrire la relation de passage pour le champ $\vec{E}$ à la surface du conducteur. En déduire le champ électrique de l'onde réfléchie. Le comparer à celui de l'onde incidente. Ecrire le champ électrique total.
2. Déterminer les champs magnétiques incident et réfléchi. Les comparer.
   Ecrire le champ magnétique total. Le comparer au champ électrique total. Que peut-on dire de l'onde électromagnétique totale ?
3. Que vaut le coefficient de réflexion en énergie ?
4. Ecrire la relation de passage pour le champ magnétique à la surface du conducteur. En déduire le courant surfacique $\vec{j_s}$ à la surface du conducteur. Que vaut la densité surfacique de charges à la surface du conducteur ?
5. Montrer que la force exercée par le champ électromagnétique sur une surface dS du conducteur s'écrit : $d\vec{F} = \vec{j_s}\, dS \wedge \vec{B_i}(z = 0, t)$.
   En déduire la pression électromagnétique (appelée *pression de radiation*) exercée sur le conducteur.
6. Retrouver le résultat précédent en interprétant la lumière en terme de photons et en considérant le rebond des photons sur le métal parfait. Pour cela, exprimer la densité volumique moyenne de photons incidents $< n_i^* >$ en fct de la densité volumique d'énergie de photons incidents $< u_i >$.
7. Calculer la pression de radiation exercée par un laser de diamètre $d = 5$ mm et de puissance moyenne $< P >= 100$ W (laser utilisé industriellement pour la découpe de papier).
   Calculer la pression de radiation solaire sachant que l'éclairement, qui est égal à la norme du vecteur de Poynting, vaut : $\mathcal{E} \simeq 1400$ W.m^{-2}.

Ex. 4 : Réflexion d'une OPPM polarisée circulairement sur un métal [*à faire à la maison*]

Une OPPM de pulsation ω, polarisée circulairement droite et se propageant dans le vide dans le sens des z croissants, rencontre un métal parfait en $z = 0$.

1. Ecrire l'expression du champ électrique de l'onde incidente.
2. Déterminer le champ électrique et la polarisation de l'onde réfléchie.
3. Déterminer les champs magnétiques incident et réfléchi.
4. Comparer les champs électrique et magnétique de l'onde résultante.
5. Calculer le vecteur de Poynting et la densité d'énergie em. Commenter.
6. Calculer les densités superficielles de charge et de courant à la surface du conducteur.

Ex. 5 : Onde électromagnétique dans un plasma peu dense : cas de l'ionosphère

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma occupant le demi-espace $z \geq 0$.
Un plasma est un gaz ionisé (constitué d'électrons libres et d'ions positifs) globalement neutre. On considérera un plasma peu dense et on supposera les charges en mouvement non relativistes.

1. Faire le bilan de toutes les forces appliquées à un électron libre et préciser lesquelles sont négligeables et pourquoi. On admettra que, dans un plasma, on a : $\|\vec{B}\| \leq \|\vec{E}\|/c$.
2. Calculer la vitesse de déplacement d'un électron libre dans un champ électrique oscillant de la forme : $\underline{\vec{E}} = E_0 \; e^{i\omega t} \; \vec{u}_x$.
3. Expliquer pourquoi on peut négliger le mouvement des ions positifs.

   Montrer que le plasma possède une conductivité complexe que l'on exprimera en fonction de la densité volumique d'électrons libres n.
4. Calculer la puissance volumique moyenne cédée par le champ électromagnétique aux électrons.
5. Etablir l'équation de propagation du champ $\underline{\vec{E}}$ et la relation de dispersion pour une onde plane de la forme :

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = E_0 \; \exp[i(\omega t - kz)] \; \vec{u}_x$$

   Montrer que, dans un plasma, on a bien : $\|\vec{B}\| \leq \|\vec{E}\|/c$.
6. En déduire qu'il existe une fréquence de coupure f_p en dessous de laquelle l'onde ne peut se propager. Donner l'expression de f_p.
   Caractériser entièrement l'onde dans les deux cas : $f < f_p$ et $f > f_p$.
7. Calculer, dans le cas où il y a propagation, la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Les représenter sur un graphe en fonction de la fréquence.
8. L'ionosphère, couche de l'atmosphère située à plus de 50 km d'altitude, peut être considérée comme un plasma avec $n \simeq 10^{11}$ m^{-3}.
   (a) Pourquoi l'ionosphère est un plasma ?
   (b) Calculer la fréquence f_p et longueur d'onde plasma λ_p de l'ionosphère.
   (c) Expliquer comment se fait la transmission des ondes radio GO et FM.
   Pourquoi les GO peuvent être captées beaucoup plus loin du lieu d'émission que la FM ?

A.N. : $\epsilon \simeq \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F.m^{-1}, $\mu \simeq \mu_0$; masse de l'électron : $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg ; $f_{GO} = 167$ kHz (France Inter) et $f_{FM} = 105,5$ MHz (France Info).