Quelques compléments concernant la notation nabla

$\vec{grad} = \vec{\nabla}$ $\quad div = \vec{\nabla}.$ $\quad \vec{rot} = \vec{\nabla}\wedge$ $\quad \Delta = div(\vec{grad}) = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}$

avec $\vec{\nabla} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{vmatrix}$ en cartésiennes

↳ permet de retrouver rapidement les expression des opérateurs div, $\vec{rot}$, Δ <u>en cartésiennes</u> car les vecteurs unitaires $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ sont <u>FIXES</u> :

$$div \vec{A} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\Delta f = \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

mais <u>ATTENTION</u> dans les autres syst. de coordonnées :

– <u>$\vec{\nabla}$ ne s'écrit pas aussi simplement</u> :

↳ par ex en cylindriques : $\vec{\nabla} = \begin{vmatrix} \partial/\partial r \\ \frac{1}{r}\partial/\partial\theta \\ \partial/\partial z \end{vmatrix}$ $\left(\text{et non } \begin{vmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial\theta \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} \right.$ ↳ n'est même pas homogène ! $\left.\right)$

– il faut faire attention quand on calcule div et rot dans les autres syst. de coord, car les vecteurs unitaires des coord. cylindriques et sphériques ne sont <u>PAS constants</u> !

↳ par ex. en cylindriques :

$$div \vec{A} = \vec{\nabla} . (A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_z \vec{u}_z)$$

avec $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ qui dépendent de θ : $\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta} = \vec{u}_\theta$ et $\frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{u}_r$!!

$\Rightarrow$ pour retrouver l'exp. de div en cylindriques, il faut écrire :

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\vec{A} = & \underbrace{\vec{u}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r}}\left(A_r\vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_z \vec{u}_z\right) \\ & + \vec{u}_\theta \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\quad '' \quad \right) \\ & + \underbrace{\vec{u}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z}}_{\text{dans cet ordre !}}\left(\quad '' \quad \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left[A_r \vec{u}_\theta \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta}}_{=\vec{u}_\theta} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\right] + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right] A_r + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r A_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Rq : on peut aussi obtenir les expressions des opérateurs $\vec{\mathrm{grad}}$, div, $\vec{\mathrm{rot}}$ directement à partir de leur définition

↳ voir "Formulaire d'analyse vectorielle détaillé" de L2 sur ma page web du cours (p11 pr div en sphériques)

↳ la notation $\vec{\nabla}$ permet de retrouver la plupart des formules d'analyse vectorielle, il suffit d'appliquer les règles de la dérivation, du produit scalaire et produit vectoriel et de "bidouiller" un peu :

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}}\, f) = \underbrace{\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}}_{=\vec{0} \text{ car produit vectoriel de 2 vect } //} f = \vec{0}$$

$$\mathrm{div}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \underbrace{(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})}_{\perp \vec{\nabla}} = 0$$

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{A} = \vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

"le bidouillage" est en rouge ---

$$\mathrm{div}(f\vec{A}) = \vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) = \vec{\nabla}f \cdot \vec{A} + f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\cdot\vec{A} + f\,\mathrm{div}\vec{A}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(f\vec{A}) = \vec{\nabla}\wedge(f\vec{A}) = \vec{\nabla}f \wedge \vec{A} + f\,\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\wedge\vec{A} + f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}$$

↳ Attention, cette méthode n'est qu'un <u>moyen mnémotechnique</u> de retrouver ces formules ; ce n'est <u>pas une démonstration</u> rigoureuse !