Licence

S3

Introduction à l'électromagnétisme

Formulaire

Université de Cergy-Pontoise
Département de Physique
C. Pinettes, G. Rollet, G. Trambly

v. 14/09/2010

Avertissement

Ce fascicule rappelle et résume les notions ou outils mathématiques utiles pour le cours d'électromagnétisme.

L'objectif de ce fascicule est double : énumérer les formules mathématiques à connaître et aider à bien les comprendre pour mieux les utiliser.

Il ne se substitue en aucun cas au cours de mathématiques. Nous nous contentons d'énumérer ici les définitions, les théorèmes importants et les propriétés fondamentales.

Nous admettrons en particulier que la plupart des fonctions physiques –du moins celles vues en L2– sont de « bonnes » fonctions, continues, dérivables autant que l'on veut…

En particulier, nous ne considérerons que les fonctions des variables réelles et nous nous limiterons aux espaces euclidiens.

Dernière remarque, les physiciens notent indifféremment la variable et la fonction par la même grandeur.

Par exemple : $d=\sqrt{x^2+y^2}$

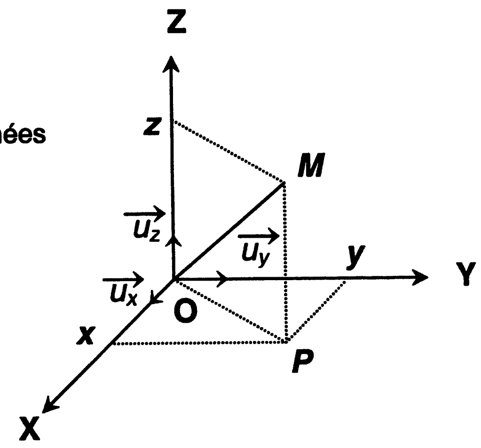
définit deux fonctions : $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ *et* $g(r,\theta)=r$

mais ces deux fonctions seront notées par la même fonction par les physiciens :

Par exemple : $d=d(x,y)=d(r,\theta)$.

1. SYSTEMES DE COORDONNEES

1.1. COORDONNEES CARTESIENNES



Définition

Pour une origine O et une base orthonormée ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$), les coordonnées cartésiennes (*x, y, z*) d'un point *M* sont définies sur le dessin :
Où P est la projection de M dans le plan (*OXY*).
Avec $x \in [-\infty, +\infty]$, $y \in [-\infty, +\infty]$, $z \in [-\infty, +\infty]$.

Lignes de coordonnées

Lignes sur lesquelles seule *x* varie : droites // (OX)
Lignes sur lesquelles seule *y* varie : droites // (OY)
Lignes sur lesquelles seule *z* varie : droites // (OZ)
L'intersection de ces lignes définit un point (*x, y, z*).

Base associée ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) orthonormée directe
définie par : déplacement vectoriel de *M* lorsque (*x, y, z*) varient séparément

Dans cette base : $\boxed{\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z}$

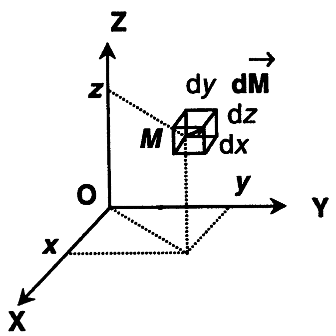
Produit scalaire $\boxed{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = xx' + yy' + zz'}$

En particulier : $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Produit vectoriel

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OM'} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \begin{array}{|cc} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \\ x & x' \\ y & y' \end{array} = \begin{vmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{vmatrix}$$

Déplacement élémentaire



- *dx* : variation infinitésimale de *x* à *y* et *z* constants
- *dy* : variation infinitésimale de *x* à *x* et *z* constants
- *dz* : variation infinitésimale de *x* à *x* et *y* constants

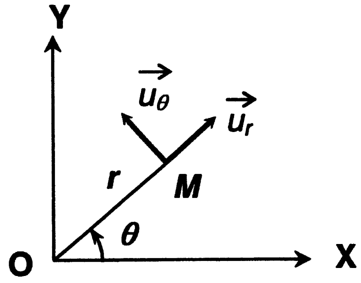
$$\rightarrow \boxed{d\overrightarrow{M} = dx\ \vec{u}_x + dy\ \vec{u}_y + dz\ \vec{u}_z}$$

Longueur élémentaire $\left\|d\overrightarrow{M}\right\|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

Volume élémentaire : $\boxed{d\tau = dx\,dy\,dz}$

Surface élémentaire sur un plan $\perp$ à l'axe *(OZ)* : $dS = dx\,dy$
" *(OX)* : $dS = dy\,dz$
" *(OY)* : $dS = dx\,dz$

1.2. COORDONNEES POLAIRES (DANS UN PLAN)



Définition
Les coordonnées polaires (*r*, *θ*) d'un point *M* (distinct de *O*) sont définies par :

$r = \|\overrightarrow{OM}\|$ = distance à l'origine $\qquad r > 0$

$\theta = (\widehat{OX, \overrightarrow{OM}})$ orienté = angle polaire $\qquad 0 \le \theta < 2\pi$.

Lignes de coordonnées
Lignes sur lesquelles seule *r* varie : droites passant par *O* (= rayons)
Lignes sur lesquelles seule *θ* varie : cercles centrés en *O*.
L'intersection de ces lignes définit un point (*r*, *θ*).

Quand a-t-on intérêt à utiliser ce système de coordonnées ?
Problèmes plans à symétrie circulaire.
Par ex. : rotation plane autour de O, ou problèmes où propriétés ne dépendent que de la distance à un point.

Base associée : LOCALE ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$) orthonormée, tangents aux lignes de coordonnées
définie par : déplacement vectoriel de *M* lorsque (*r*, *θ*) varient séparément

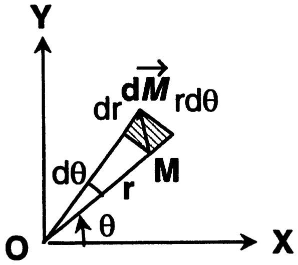
Soit : $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ et $\vec{u}_\theta = \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \left\| \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \right\|^{-1} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \dfrac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta}$

Cette base est orthonormée : $\|\vec{u}_r\| = \|\vec{u}_r\| = 1$ et $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta) = +\dfrac{\pi}{2}$

Dans cette base : $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r}$

Produit scalaire $\qquad \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = r\,\vec{u}_r \cdot r'\vec{u}_{r'} = r\,r'\cos(\theta - \theta')$

Déplacement élémentaire du point M



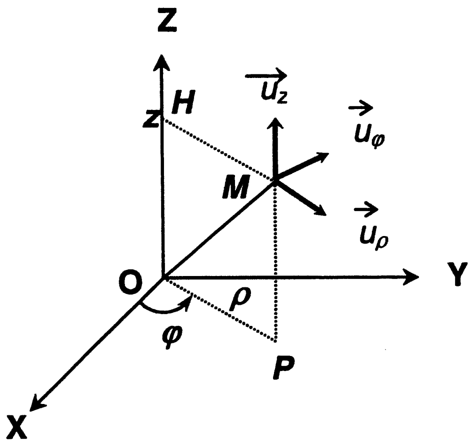
- *pour une variation* d*ρ*, *à θ* constants, *M* se déplace de d*ρ* *suivant* $\vec{u}_r$
- *pour une variation* d*θ*, *à θ* constants, *M* se déplace de *r* d*θ* *suivant* $\vec{u}_\theta$

$\rightarrow \boxed{d\vec{M} = dr\ \vec{u}_r + r\,d\theta\ \vec{u}_\theta}$

Longueur élémentaire $\qquad \|d\vec{M}\| = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$

Surface élémentaire (hachurée) $\qquad \boxed{dS = r\ dr\,d\theta}$

1.3. COORDONNEES CYLINDRIQUES (DANS L'ESPACE)



Définition
Les coordonnées cylindriques (*ρ*, *φ*, *z*) d'un point *M* sont définies par :

$\rho = \|\overrightarrow{OP}\|$ = distance à l'axe (OZ) $\qquad \rho > 0$

$\varphi = (\widehat{0X, \overrightarrow{OP}})$ orienté $\qquad 0 \le \varphi < 2\pi$

$z = \overline{OH}$ $\qquad z \in [-\infty, +\infty]$

P étant la projection de *M* dans le plan (*0XY*)
et *H* sa projection parallèle à ce plan sur l'axe (*OZ*).

Lignes de coordonnées

Lignes sur lesquelles seule ρ varie : droites parallèles au plan (*OXY*) coupant l'axe (*OZ*).
Lignes sur lesquelles seule φ varie : cercles d'axes (*OZ*).
Lignes sur lesquelles seule z varie : droites // (*OZ*).
L'intersection de ces lignes définit un point (ρ, φ, z).

Quand a-t-on intérêt à utiliser ce système de coordonnées ?

Problèmes à symétrie cylindrique
Par ex. : problèmes avec axe privilégié, comme rotation autour de l'axe (*OZ*).

Base associée : LOCALE $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ orthonormée directe

définie par : déplacement vectoriel de *M* lorsque (r, φ, z) varient <u>séparément</u>

Soient : $\vec{u}_\rho=\dfrac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|}$ $\quad \vec{u}_\varphi=\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\varphi}\left\|\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\varphi}\right\|^{-1}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\varphi}=\dfrac{\partial\vec{u}_r}{\partial\varphi}$ $\quad$ et $\quad \vec{u}_z=\dfrac{\overrightarrow{OH}}{\|\overrightarrow{OH}\|}$

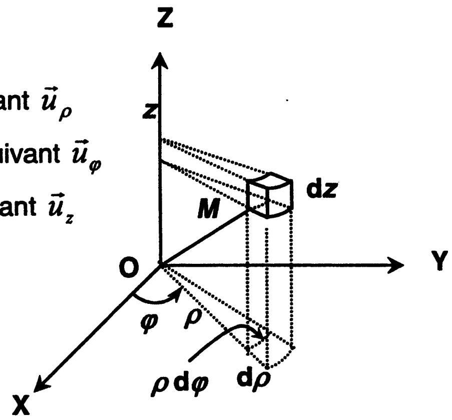
$\vec{u}_\varphi$ dans le plan (0XY) avec $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi)=+\dfrac{\pi}{2}$

Dans cette base : $\boxed{\overrightarrow{OM}=\rho\,\vec{u}_\rho+z\,\vec{u}_z}$

Produit scalaire

$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM}'=(\rho\,\vec{u}_\rho+z\,\vec{u}_z)\cdot(\rho'\vec{u}_{\rho'}+z'\vec{u}_{z'})=\rho\,\rho'\cos(\varphi-\varphi')+zz'$$

Déplacement élémentaire du point M



- *pour une variation* dρ, à φ et z constants, *M* se déplace de dρ suivant $\vec{u}_\rho$
- *pour une variation* dφ, à ρ et z constants, *M* se déplace de $\rho\,\mathrm{d}\varphi$ suivant $\vec{u}_\varphi$
- *pour une variation* dz, à ρ et φ constants, *M* se déplace de dz suivant $\vec{u}_z$

$\rightarrow \boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{M}=\mathrm{d}\rho\ \vec{u}_\rho+\rho\,\mathrm{d}\varphi\ \vec{u}_\varphi+\mathrm{d}z\ \vec{u}_z}$

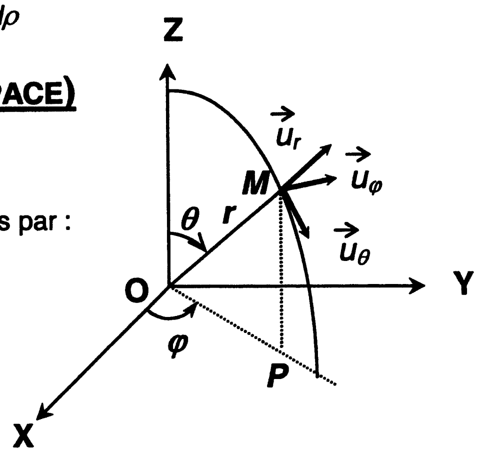
Longueur élémentaire $\quad \left\|\mathrm{d}\overrightarrow{M}\right\|=\sqrt{\mathrm{d}\rho^2+\rho^2\,\mathrm{d}\varphi^2+\mathrm{d}z^2}$

Volume élémentaire $\quad \boxed{\mathrm{d}\tau=\rho\ \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}$

Surface élémentaire sur un cylindre d'axe (*Oz*) : $\mathrm{d}S=\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$

" dans un plan $\perp$ à l'axe (*Oz*) : $dS=\rho\ d\varphi\,d\rho$

1.4. <u>COORDONNEES SPHERIQUES (DANS L'ESPACE)</u>



Définition

Les coordonnées sphériques (r,φ, φ) d'un point *M* sont définies par :

$r=\|\overrightarrow{OM}\|$ $\qquad r>0$

$\theta=(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{0Z})$ $\qquad 0\le\theta\le\pi$

$\varphi=(\overrightarrow{0X}, \overrightarrow{OP})$ orienté $\qquad 0\le\varphi<2\pi$

où *P* est la projection de *M* dans le plan (*0XY*).

Lignes de coordonnées

Lignes sur lesquelles seule r varie : droites passant par O (= rayons)

Lignes sur lesquelles seule θ varie : demi-cercles centrés en O et de diamètre sur (OZ) (= méridiens)

Lignes sur lesquelles seule φ varie : cercles d'axes (OZ) (= parallèles)

L'intersection de ces lignes définit un point (r, θ, φ).

Quand a-t-on intérêt à utiliser ce système de coordonnées ?

Problèmes à symétrie sphérique, avec un point privilégié.

Par ex. : problèmes où propriétés ne dépendent que distance à un point.

Base associée : LOCALE ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\varphi$) orthonormée directe

définie par : déplacement vectoriel de M lorsque (r, θ, φ) varient <u>séparément</u>

Soient : $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$

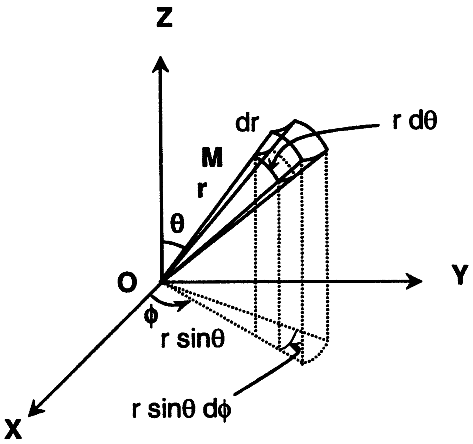
$$\vec{u}_\theta = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\left\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\right\|^{-1} = \frac{1}{r}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta}$$

$$\vec{u}_\varphi = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}\left\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}\right\|^{-1} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \varphi}$$

$\vec{u}_\theta$ dans le plan ($\overrightarrow{OM}$, OZ) tel que $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta) = -\dfrac{\pi}{2}$

$\vec{u}_\varphi$ tel que ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\varphi$) forment un trièdre direct

Dans cette base : $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r}$



Déplacement élémentaire du point M :

- *pour une variation dr*, à θ et φ constants, M se déplace de dr suivant $\vec{u}_r$
- *pour une variation dθ*, à r et φ constants, M se déplace de $r\,d\theta$ suivant $\vec{u}_\theta$
- *pour une variation dr*, à r et θ constants, M se déplace de $r\sin\theta\, d\varphi$ suivant $\vec{u}_\varphi$

$\rightarrow \boxed{\overrightarrow{dM} = dr\ \vec{u}_r + r\sin\theta\, d\varphi\ \vec{u}_\varphi + r\, d\theta\ \vec{u}_\theta}$

Longueur élémentaire $\left\|\overrightarrow{dM}\right\| = \sqrt{dr^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 + r^2\, d\theta^2}$

Volume élémentaire $\boxed{d\tau = dr\ r\,d\theta\ r\sin\theta\, d\varphi = r^2\sin\theta\ dr\,d\varphi\,d\theta}$

Surface élémentaire sur une sphère centrée en O : $dS = r^2\sin\theta\ d\varphi\ d\theta$

1.5. RELATIONS AVEC LES COORDONNEES CARTESIENNES

Coordonnées polaires (dans le plan)

$x = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$y = r\sin\theta \qquad \mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{y}{x}$

Coordonnées cylindriques (dans l'espace)

$$x = r\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r\sin\varphi \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

$$z = z \qquad z = z$$

Coordonnées sphériques (dans l'espace)

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

$$z = r\cos\theta \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

2. ANALYSE VECTORIELLE

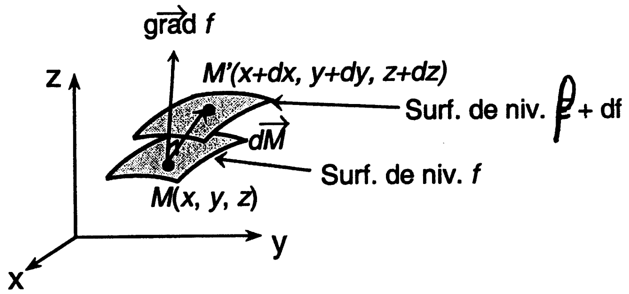
2.1. GRADIENT D'UNE FONCTION

Définition

A une dimension, on a besoin d'un scalaire (la pente de la courbe $y = f(x)$) pour définir la différentielle de f : $\mathrm{d}f = f^{'}(x)\,\mathrm{d}x$

A trois dimensions, il faudra un vecteur, le vecteur gradient, pour définir la différentielle de f :

$$\boxed{\mathrm{d}f = \overrightarrow{grad}f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{M}}$$



Interprétation géométrique

* $\mathrm{d}f > 0$ et maximum lorsque $\overrightarrow{grad}f$ et $\overrightarrow{dM}$ sont colinéaires
  → le gradient indique **la direction de plus grande variation (pente)**
  (direction le long de laquelle f augmente le plus vite)

* $\mathrm{d}f = 0$ lorsqu'on se déplace sur la surface f = cste = surface de niveau f
  c'est à dire lorsque $\overrightarrow{dM}$ tangent à la surface f = cste et alors $\overrightarrow{grad}f \perp \overrightarrow{dM}$
  → le gradient en M est orienté suivant **la normale à la surface f = cste** passant par M.

Expressions du gradient dans les différents systèmes de coordonnées

En cartésiennes :
(base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$)

$$\overrightarrow{grad}f = \left| \begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \end{array} \right.$$

En cylindriques :
(base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$)

$$\overrightarrow{grad}f = \left| \begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\varphi,z} \\ \left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{\rho,z} \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)_{\rho,\varphi} \end{array} \right.$$

En sphériques :
(base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$)

$$\overrightarrow{grad}f = \left| \begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)_{\varphi,\theta} \\ \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} \\ \left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} \end{array} \right.$$

On peut les retrouver facilement à partir de la définition du gradient : $\mathrm{d}f = \overrightarrow{grad}f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{M}$

Ex. : pour les coordonnées cylindriques, $f(\rho, \varphi, z)$

On a : $\overrightarrow{dM} = d\rho\ \vec{u}_\rho + \rho d\varphi\ \vec{u}_\varphi + dz\ \vec{u}_z$

On peut écrire le gradient sous la forme : $\overrightarrow{grad}f = a_\rho\,\vec{u}_\rho + a_\varphi\,\vec{u}_\varphi + a_z\,\vec{u}_z$

Donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{grad}f \cdot \overrightarrow{dM} &= (a_\rho\,\vec{u}_\rho + a_\varphi\,\vec{u}_\varphi + a_z\,\vec{u}_z) \cdot (\mathrm{d}\rho\ \vec{u}_\rho + \rho\mathrm{d}\varphi\ \vec{u}_\varphi + \mathrm{d}z\ \vec{u}_z) \\ &= a_\rho\,\mathrm{d}\rho + \rho\,a_\varphi\,\mathrm{d}\varphi + a_z\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Or : $\mathrm{d}f = f'_\rho\, \mathrm{d}\rho + f'_\varphi\, \mathrm{d}\varphi + f'_{z\theta}\, \mathrm{d}z$

Les variables (ρ, φ, z) étant *indépendantes*, on peut choisir des chemins particuliers, comme par exemple celui où seule ρ varie de ρ à $\rho + \mathrm{d}\rho$, φ et z étant constantes.

On a alors sur ce chemin : $\mathrm{d}f = a_\rho\, \mathrm{d}\rho = f'_\rho\, \mathrm{d}\rho$ pour tout (ρ, φ, z).

D'où l'on tire : $a_\rho = f'_\rho$, $\forall\, (\rho, \varphi, z)$.

De la même façon, on montre : $a_\varphi = \dfrac{1}{\rho} f'_\varphi$, $\forall\, (\rho, \varphi, z)$ et $a_z = f'_z$, $\forall\, (\rho, \varphi, z)$.

Exemple : Expression d'une force conservatrice en fonction du gradient de E_p

Si $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle E_p : $\vec{F}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{M} = -\mathrm{d}E_p$

Or : $\vec{F}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{M} = F_x\, \mathrm{d}x + F_y\, \mathrm{d}y + F_z\, \mathrm{d}z$

Et par définition : $\mathrm{d}E_p = \left.\dfrac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y,z} \mathrm{d}x + \left.\dfrac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z} \mathrm{d}y + \left.\dfrac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{x,y} \mathrm{d}z$.

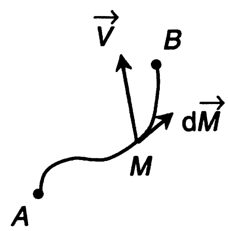
Ceci est vrai quelques soient dx, dy et dz donc :

$F_x = -\left.\dfrac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y,z}$. On montre de la même façon : $F_y = -\left.\dfrac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z}$, $F_z = -\left.\dfrac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{x,y}$.

Soit : $\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p}$.

Autre exemple de relation de ce type : entre le potentiel V et le champ électrique $\vec{E}$: $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$.

2.2. INTEGRALE CURVILIGNE – CIRCULATION



Soit $\vec{V}$ un champ vectoriel (qui à tout point M(x, y, z) associe un vecteur $\vec{V}(x,y,z)$).

Définition

La circulation de $\vec{V}$ sur le trajet AB est : $C = \int_A^B \vec{V}\cdot d\overrightarrow{M}$

Propriété

La circulation sur tout contour fermé d'un gradient est nulle. Formulé autrement : sa circulation ne dépend pas du chemin suivi, elle ne dépend que des points de départ et d'arrivée du contour.

$\overrightarrow{grad} f \cdot d\overrightarrow{M} = df$ (par définition du gradient)

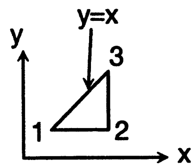
Le long d'un contour fermé : $\boxed{\oint \overrightarrow{grad} f \cdot d\overrightarrow{M} = \oint df = 0}$.

Le long d'un contour ouvert AB : $\boxed{\int_A^B \overrightarrow{grad} f \cdot d\vec{M} = f(B) - f(A)}$

Par contre, si $\vec{V}$ n'est pas un gradient, la circulation sur un contour fermé peut être non nulle. Formulé autrement : sa circulation dépend du chemin suivi.

Exemple :

$\vec{V} = -x\,\vec{u}_y$ *sur le contour C fermé 1-2-3-1 de la figure*



$$\vec{V}\cdot d\vec{M} = -x\,dy$$

$$\oint_C \vec{V}\cdot d\vec{M} = \int_1^2 -x\,dy + \int_2^3 -x\,dy + \int_3^1 -x\,dy = 0 - x_2(y_3 - y_1) - \frac{(y_1^2 - y_3^2)}{2}$$

qui est différent de *0* a priori. Si par ex. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $y_1 = 1$, $y_3 = 2$: $\oint_C \vec{V}\cdot d\vec{M} = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \neq 0$

On reconnaîtra le travail d'une force de pression ($\int -p\,dV$) en thermodynamique.

2.3. DIVERGENCE (FORME LOCALE DU FLUX)

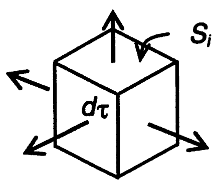
Soit $\vec{V}$ un champ de vecteur (qui à tout point M(*x*, *y*, *z*) associe un vecteur $\vec{V}(x,y,z)$).

Flux

Le **flux** de $\vec{V}$ à travers une surface *S* orientée est le scalaire : $F_{\vec{V}}(S) = \iint_S \vec{V}\cdot d\vec{S}$

Si *S* est une surface fermée entourant un volume τ, on oriente toujours $d\vec{S}$ vers l'extérieur.

Forme locale (définition)



Le flux élémentaire $dF_{\vec{V}} = F_{\vec{V}}(S(d\tau))$ de $\vec{V}$ sortant à travers la surface *S* entourant le volume élémentaire $d\tau$ est proportionnel à ce volume.

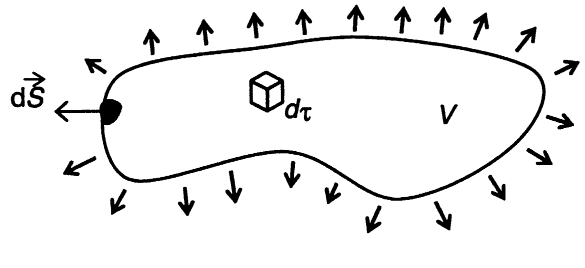
On appelle **divergence** de $\vec{V}$ (notée div$\vec{V}$) le coefficient de proportionnalité.

$$dF_{\vec{V}} = F_{\vec{V}}(S(d\tau)) = \sum_{i=1}^{6} \vec{V}\cdot\vec{S}_i = div\,\vec{V}\,d\tau\,,$$

où S_i désigne les surfaces des 6 faces du cube $d\tau$.

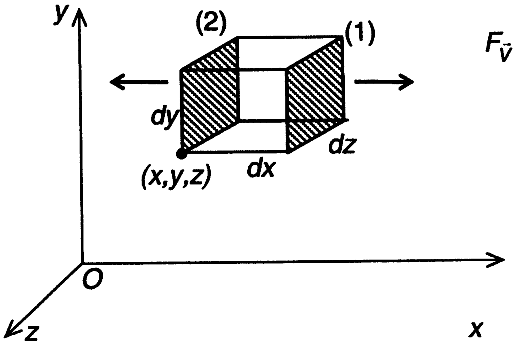
Forme globale (formule d'Ostrogradski)

Le flux de $\vec{V}$ sortant à travers une surface fermée *S(V)* entourant le volume *V* est égal à la somme de div $\vec{V}$ sur tout le volume :



$$F_{\vec{V}}(S(V)) = \iint_{S(V)} \vec{V}\cdot d\vec{S} = \iiint_V div\,\vec{V}\,d\tau$$

Calcul de la divergence en coordonnées cartésiennes



$$F_{\vec V}(S_1 \cup S_2) = V_{x+dx}\, dy\, dz - V_x\, dy\, dz$$

$$\hookrightarrow x+dx \qquad \hookrightarrow x$$

$$= \left[V_x(x+dx,y,z) - V_x(x,y,z)\right] dy\, dz$$

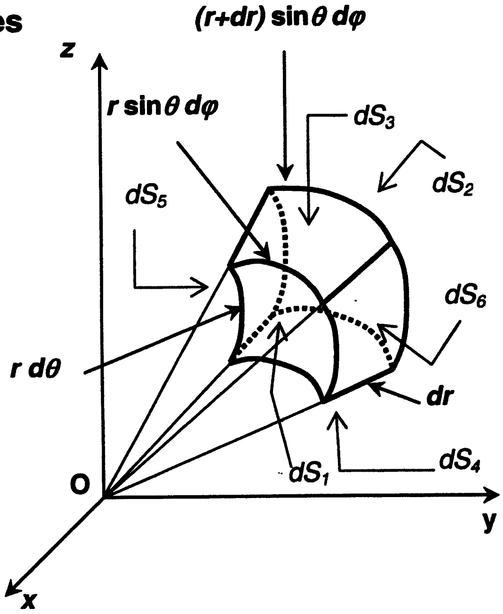
$$= \left[\frac{\partial V_x}{\partial x}(x,y,z)dx\right] dy\, dz$$

$$= \frac{\partial V_x}{\partial x} d\tau$$

En sommant sur les deux autres couples de forces :

$$F_{\vec V}(S(d\tau)) = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) d\tau \quad \text{d'où} \quad \boxed{\operatorname{div}\vec V = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \cdot \vec V}$$

Calcul de la divergence en coordonnées sphériques



Soit le champ de vecteurs :
$\vec E(r,\theta,\varphi) = E_r(r,\theta,\varphi)\vec u_r + E_\theta(r,\theta,\varphi)\vec u_\theta + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\vec u_\varphi$

Le volume élémentaire en coordonnées sphériques est :
$d\tau = dr \;\; rd\theta \;\; r\sin\phi\, d\varphi$.

La surface dS, entourant ce volume, est composées de 6 facettes : $dS = dS_1 \cup dS_2 \cup dS_3 \cup dS_4 \cup dS_5 \cup dS_6$.

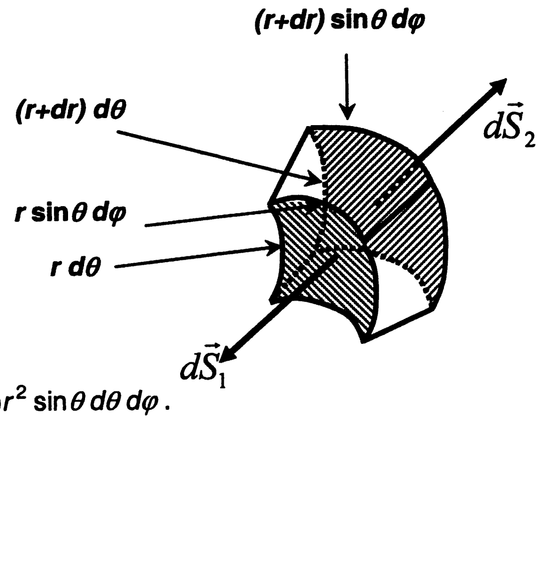
Par définition de la divergence le flux de $\vec E$ à travers la surface fermée dS est :

$$F_{\vec E}(dS) = \operatorname{div}\vec E\; d\tau \qquad (1)$$

Pour calculer la divergence il faut donc calculer le flux de $\vec E$ sortant de $d\tau$, qui s'écrit : $F_{\vec E}(dS) = \sum_{i=1}^{6} \vec E \cdot d\vec S_i$.

Flux de $\vec E$ à travers les facettes dS_1 et dS_2 perpendiculaire à $\vec u_r$: $d\vec S_1 = -dS_1\vec u_r$ et $d\vec S_2 = dS_2\vec u_r$

$$F_{\vec E}(dS_1 \cup dS_2) = \vec E(r,\theta,\varphi)\cdot d\vec S_1 + \vec E(r+dr,\theta,\varphi)\cdot d\vec S_2 = -dS_1E_r(r,\theta,\varphi) + dS_2E_r(r+dr,\theta,\varphi).$$



Les surfaces dS_1 et dS_2 ne sont pas égales :

$dS_1 = r\, d\theta \;\, r\sin\theta\, d\varphi$ et

$$dS_2 = (r+dr)\,d\theta\,(r+dr)\sin\theta\, d\varphi$$
$$= (r^2 + 2rdr + dr^2)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$
$$\approx (r^2 + 2rdr)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

car, dr étant très petit, on ne garde pas le terme d'ordres 2 en dr.

On obtient donc

$$F_{\vec E}(S_1 \cup S_2) = E_r(r+dr,\theta,\varphi)\left(r^2 + 2rdr\right)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi - E_r(r,\theta,\varphi)r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Par ailleurs : $E_r(r+dr,\theta,\varphi)-E_r(r,\theta,\varphi)=\dfrac{\partial E_r}{\partial r}dr$, donc :

$$F_{\vec{E}}(dS_1\cup dS_2)=\left(E_r(r,\theta,\varphi)+\frac{\partial E_r}{\partial r}dr\right)\left(r^2+2rdr\right)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi-E_r(r,\theta,\varphi)r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$
$$=\left(r^2\frac{\partial E_r}{\partial r}dr+2rdr\,E_r(r,\theta,\varphi)+2r\frac{\partial E_r}{\partial r}(dr)^2\right)\sin\theta\, d\theta d\varphi$$

en négligeant le terme en $(dr)^2$ il vient :

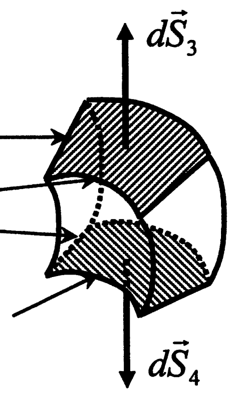
$$F_{\vec{E}}(dS_1\cup dS_2)=\frac{\partial\left(r^2E_r\right)}{\partial r}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2E_r\right)}{\partial r}\,d\tau. \qquad (2)$$

Flux de $\vec{E}$ à travers les facettes dS_3 et dS_4 perpendiculaire à $\vec{u}_\theta$: $d\vec{S}_3=-dS_3\vec{u}_\theta$ et $d\vec{S}_4=dS_4\vec{u}_\theta$

$$F_{\vec{E}}(dS_3\cup dS_4)=\vec{E}(r,\theta,\varphi)\cdot d\vec{S}_3+\vec{E}(r,\theta+d\theta,\varphi)\cdot d\vec{S}_4=-dS_3E_\theta(r,\theta,\varphi)+dS_4E_\theta(r,\theta+d\theta,\varphi).$$

Les surfaces dS_3 et dS_4 ne sont pas égales :
$dS_3=dr\ r\sin\theta\, d\varphi$ et
$dS_4=dr\ r\sin(\theta+d\theta)\, d\varphi$.

Le développement limité de $\sin(\theta+d\theta)$ au voisinage de θ donne (premier ordre en $d\theta$) :
$\sin(\theta+d\theta)\approx\sin\theta+\dfrac{d\sin\theta}{d\theta}d\theta=\sin\theta+\cos\theta\ d\theta$ donc
$dS_4\approx dr\ r(\sin\theta+\cos\theta\ d\theta)d\varphi$.



On obtient donc :
$$F_{\vec{E}}(S_3\cup S_4)=E_\theta(r,\theta+d\theta,\varphi)\,r\,dr(\sin\theta+\cos\theta\, d\theta)d\varphi-E_\theta(r,\theta,\varphi)r\,dr\sin\theta\, d\varphi.$$

Or : $E_\theta(r,\theta+d\theta,\varphi)=E_\theta(r,\theta,\varphi)+\dfrac{\partial E_\theta}{\partial\theta}d\theta$, donc :

$$F_{\vec{E}}(S_3\cup S_4)=E_\theta(r,\theta,\varphi)r\,dr\cos\theta\, d\theta\, d\varphi+\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta}r\,dr\sin\theta\, d\theta\, d\varphi+\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta}r\,dr\cos\theta(d\theta)^2\, d\varphi$$

en négligeant le terme en $(d\theta)^2$ il vient :
$$F_{\vec{E}}(S_3\cup S_4)=\frac{1}{r\sin\theta}\left(E_\theta(r,\theta,\varphi)\cos\theta+\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta}\sin\theta\right)r^2\,dr\sin\theta\, d\theta\, d\varphi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, E_\theta)\,d\tau. \qquad (3)$$

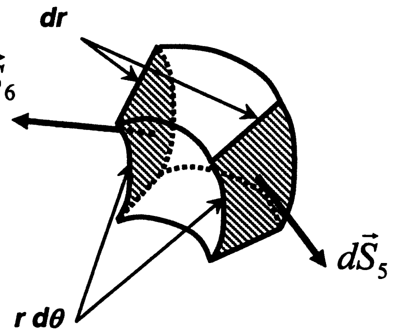
Flux de $\vec{E}$ à travers les facettes dS_5 et dS_6 perpendiculaire à $\vec{u}_\varphi$: $d\vec{S}_5=-dS_5\vec{u}_\varphi$ et $d\vec{S}_6=dS_6\vec{u}_\varphi$

$$F_{\vec{E}}(dS_5\cup dS_6)=\vec{E}(r,\theta,\varphi)\cdot d\vec{S}_5+\vec{E}(r,\theta,\varphi+d\varphi)\cdot d\vec{S}_6=-dS_5E_\varphi(r,\theta,\varphi)+dS_6E_\varphi(r,\theta,\varphi+d\varphi).$$

Les surfaces dS_5 et dS_6 sont égales : $dS_5=dS_6=dr\,r\,d\theta$.

Sachant que $E_\varphi(r,\theta,\varphi+d\varphi)=E_\varphi(r,\theta,\varphi)+\dfrac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}d\varphi$,

on a immédiatement :
$$F_{\vec{E}}(dS_5\cup dS_6)=dr\,r\,d\theta\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}d\varphi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}dV. \qquad (4)$$



D'après les équations (2), (3) et (4) :

$$F_{\vec{E}}(S)=\sum_{i=1}^{6}\vec{E}\cdot d\vec{S}_i=\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2E_r\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,E_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}\right)d\tau$$

donc par définition de $\operatorname{div}\vec{E}$ (1) : $\boxed{\operatorname{div}\vec{E}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2E_r\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,E_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}}$

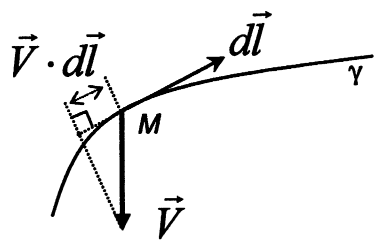
Exemple : théorème de Gauss (en électrostatique)

Soit $\vec{E}$ le champ électrique, Q les charges électriques et ρ la densité volumique de charge.
Soient S et V tels que : S est une surface entourant un volume V qui contient les charges Q.

Forme globale : Flux de $\vec{E}$ à travers S : $F_{\vec{E}}(S)=\dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}=\displaystyle\iiint_{V(S)}\frac{\rho}{\varepsilon_0}d\tau=\iiint_{V(S)}\operatorname{div}\vec{E}\,d\tau$

Forme locale : $\boxed{\operatorname{div}\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$

2.4. Rotationnel (forme locale de la circulation)

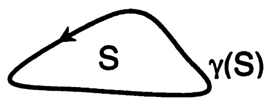


Soit $\vec{V}$ un champ de vecteur (qui à tout point M(x, y, z) associe un vecteur $\vec{V}(x,y,z)$).

Définition

On appelle **circulation** de $\vec{V}$ le long de la courbe orientée γ le scalaire : $C_{\vec{V}}(\gamma)=\displaystyle\int_\gamma\vec{V}\cdot\vec{dl}$

Lorsque γ est fermée : $C_{\vec{V}}(\gamma)=\displaystyle\oint_\gamma\vec{V}\cdot\vec{dl}$

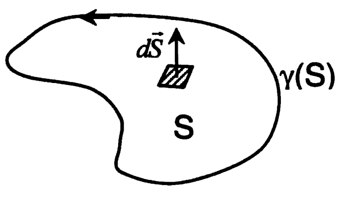


Propriété-définition (forme locale)

La circulation sur un contour élémentaire fermé $d\gamma$ entourant une surface élémentaire $d\vec{S}(d\gamma)=dS\,\vec{n}$ ($\vec{n}$ vecteur unitaire) est "proportionnelle" à cette surface. On appelle **rotationnel** de $\vec{V}$ le vecteur, noté $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{V}$, vérifiant : $C_{\vec{V}}(d\gamma)=\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{V}\cdot d\vec{S}$

Remarque : le choix de $\vec{n}$ oriente la surface $d\vec{S}(d\gamma)$ et son contour $d\gamma$ (règle de la "main droite" ou du "tire bouchon")

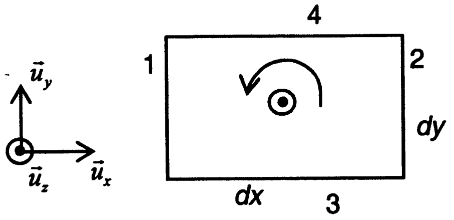
Forme globale (Théorème de Stokes-Ampère)



$$C_{\vec{V}}(\gamma(S))=\iint_S\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{V}\cdot d\vec{S}$$

Calcul du rotationnel en coordonnées cartésiennes

Soit le contour élémentaire $d\gamma$ fermé : $d\gamma = 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4$



$$\begin{aligned} C_{\vec{V}}(1 \cup 2) &= C_{\vec{V}}(1) + C_{\vec{V}}(2) \\ &= \vec{V}(x,y)\cdot d\vec{l}_1 + \vec{V}(x+dx,y)\cdot d\vec{l}_2 \\ &= \vec{V}(x,y)\cdot(-dy\,\vec{u}_y) + \vec{V}(x+dx,y)\cdot(-dy\,\vec{u}_y) \\ &= [V(x+dx,y) - V(x,y)]dy \\ &= \frac{\partial V_y}{\partial x}dxdy \end{aligned}$$

De même $C_{\vec{V}}(3 \cup 4) = -\dfrac{\partial V_x}{\partial y}dxdy$.

donc $C_{\vec{V}}(d\gamma) = C_{\vec{V}}(1 \cup 2 \cup 3 \cup 4) = \left(\dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y}\right)dxdy = \left(\dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y}\right)dS$ avec $d\vec{S}(d\gamma) = dS\,\vec{u}_z$.

Par identification avec la définition du rotationnel on obtient la composante suivant z de $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$:

$$\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}\right)_z = \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right).$$

Les autres composantes s'obtiennent de la même manière : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial V_z}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial V_x}{\partial z} - \dfrac{\partial V_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y} \end{vmatrix} = \overrightarrow{\text{grad}} \wedge \vec{V}$.

Exemple : Théorème d'Ampère (magnétostatique)

$\vec{B}$ est le champ magnétique, I le courant et $\vec{j}$ la densité de courant.

Forme globale : $C_{\vec{B}}(\gamma) = \mu_0 I_{\text{int}} = \mu_0 \iint_{S(\gamma)} \vec{j}\cdot d\vec{S} = \iint_{S(\gamma)} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}\cdot d\vec{S}$

Forme locale : $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$

2.5. COMPLEMENTS D'ANALYSE VECTORIELLE

Laplacien scalaire et Laplacien vectoriel

Définition : on appelle *laplacien scalaire* d'une fonction scalaire *f(M)* le scalaire définit par :

$$\Delta = \text{div}\,\overrightarrow{\text{grad}}$$

En coordonnées cartésiennes *f(M) = f(x,y,z)* et :

$$\Delta f = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{y,z} + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right)_{x,z} + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}\right)_{x,y}$$

On appelle *laplacien vectoriel* d'un champ de vecteur $\vec{V}(x,y,z)$ le vecteur définit en coordonnées cartésiennes par

$$\vec{\Delta}\vec{V} = (\Delta V_x)\vec{u}_x + (\Delta V_y)\vec{u}_y + (\Delta V_z)\vec{u}_z$$

Identité entre opérateurs

$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{grad}} = \vec{0}$ $\qquad$ $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div} - \vec{\Delta}$ $\qquad$ $\text{div}\,\overrightarrow{\text{rot}} = 0$

Quelques formules utiles

$$\overrightarrow{\text{grad}}(nm) = n\,\overrightarrow{\text{grad}}\,m + m\,\overrightarrow{\text{grad}}\,n$$
$$\text{div}(m\vec{A}) = m\,\text{div}\,\vec{A} + (\overrightarrow{\text{grad}}\,m)\cdot\vec{A}$$
$$\text{div}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}$$
$$\overrightarrow{\text{rot}}(m\vec{A}) = m\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} + (\overrightarrow{\text{grad}}\,m)\wedge\vec{A}$$

moins fréquente : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{A}(\text{div}\,\vec{B}) - \vec{B}(\text{div}\,\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{B}$

Notation « nabla » : $\vec{\nabla}$

Certain ouvrage introduisent le vecteur[1] symbolique « nabla », noté $\vec{\nabla}$, de coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Cela permet d'écrire :

$\overrightarrow{\text{grad}}\,f = \vec{\nabla}f$ $\qquad$ $\text{div}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V}$, $\qquad$ $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\wedge\vec{V}$ $\qquad$ $\Delta f = \nabla^2 f$

Remarque : L'utilisation du vecteur nabla est hasardeuse pour établir les formules entre opérateurs ; en particulier, elle peut conduire à un résultat faux dans le cas de $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}\wedge\vec{B})$.

Remarque : L'utilisation du vecteur nabla n'est possible qu'en coordonnées cartésiennes !

2.6. GRADIENT, DIVERGENCE, ROTATIONNEL ET LAPLACIEN DANS LES COORDONNEES USUELLES

Coordonnées cartésiennes (x,y,z)

Base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

Soient la fonction $f(x,y,z)$ et le champ de vecteur $\vec{V}(x,y,z) = V_x\,\vec{u}_x + V_y\,\vec{u}_y + V_z\,\vec{u}_z$

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}\vec{u}_x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z}\vec{u}_y + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}\vec{u}_z$$

$$\Delta f = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{y,z} + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right)_{x,z} + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}\right)_{x,y}$$ Δ est le laplacien scalaire

$$\text{div}\,\vec{V} = \left.\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)_{y,z} + \left.\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)_{x,z} + \left.\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)_{x,y}$$

---

[1] En fait c'est un opérateur.

$$\mathrm{rot}\,\vec{V} = \left[\left.\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)_{x,z} - \left.\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)_{x,y}\right]\vec{u}_x + \left[\left.\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)_{x,y} - \left.\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)_{y,z}\right]\vec{u}_y + \left[\left.\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)_{y,z} - \left.\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{x,z}\right]\vec{u}_z$$

Coordonnées sphériques (r,θ,φ)

Base ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\varphi$)

Soient la fonction $f(r,\theta,\varphi)$ et le champ de vecteur $\vec{V}(r,\theta,\varphi) = V_r\,\vec{u}_r + V_\theta\,\vec{u}_\theta + V_\varphi\,\vec{u}_\varphi$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}f} = \left.\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left.\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\left.\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta}\vec{u}_\varphi$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\left\{\left.\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right)_{\theta,\varphi} + \frac{1}{\sin\theta}\left.\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\right)_{r,\varphi} + \frac{1}{\sin^2\theta}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right)_{r,\theta}\right\}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{V} = \frac{1}{r^2}\left.\frac{\partial\left(r^2 V_r\right)}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\left.\frac{\partial\left(V_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta}\right)_{r,\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\left.\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right)_{r,\theta}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\vec{V} = {} & \frac{1}{r\sin\theta}\left[\left.\frac{\partial\left(V_\varphi\sin\theta\right)}{\partial\theta}\right)_{r,\varphi} - \left.\frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi}\right)_{r,\theta}\right]\vec{u}_r \\ & + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left.\frac{\partial V_r}{\partial\varphi}\right)_{r,\theta} - \left.\frac{\partial\left(rV_\varphi\right)}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi}\right]\vec{u}_\theta \\ & + \frac{1}{r}\left[\left.\frac{\partial\left(rV_\theta\right)}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} - \left.\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)_{r,\varphi}\right]\vec{u}_\varphi\end{aligned}$$

Coordonnées cylindriques (ρ,φ,z)

Base ($\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\varphi$, $\vec{u}_z$)

Soient la fonction $f(\rho,\varphi,z)$ et le champ de vecteur $\vec{V}(\rho,\varphi,z) = V_\rho\,\vec{u}_\rho + V_\varphi\,\vec{u}_\varphi + V_z\,\vec{u}_z$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}f} = \left.\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\varphi,z}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{\rho,z}\vec{u}_\varphi + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\rho,\varphi}\vec{u}_z$$

$$\Delta f = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}\right)_{\varphi,z} + \frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)_{\varphi,z} + \frac{1}{\rho^2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right)_{\rho,z} + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{\rho,\varphi}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{V} = \frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial\left(\rho V_\rho\right)}{\partial\rho}\right)_{\varphi,z} + \frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right)_{\rho,z} + \left.\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)_{\rho,\varphi}$$

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \left[\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial \varphi}\right)_{\rho,z} - \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)_{\rho,\varphi}\right]\vec{u}_\rho$$

$$+\left[\left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z}\right)_{\rho,\varphi} - \left(\frac{\partial (V_z)}{\partial \rho}\right)_{\varphi,z}\right]\vec{u}_\varphi$$

$$+\frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial (\rho V_\varphi)}{\partial \rho}\right)_{\varphi,z} - \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi}\right)_{\rho,z}\right]\vec{u}_z$$