Ex 1 : Champ d'un dipôle électrique et d'un dipôle magnétique

1. $$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

= potentiel créé par le dipôle $\vec{p}$ dans l'approximation dipolaire, càd loin du dipôle : $r \gg a \simeq$ distance entre les 2 charges $+q$ et $-q$ du dipôle.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi(\vec{r})$$
$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^3}\right)(\vec{p}\cdot\vec{r}) + \frac{1}{r^3}\,\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p}\cdot\vec{r})\right]$$

or $$\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{1}{r^3} = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^3}\right)\vec{u}_r = -\frac{3}{r^4}\,\vec{u}_r$$

choisissons l'axe de z t.q. $\vec{p} = p\,\vec{u}_z$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p}\cdot\vec{r}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,pz = \frac{\partial}{\partial z}(pz)\,\vec{u}_z = p\,\vec{u}_z = \vec{p}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r})} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{3}{r^4}\,\vec{u}_r(\vec{p}\cdot r\vec{u}_r) + \frac{\vec{p}}{r^3}\right]$$

$$\boxed{= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}}{r^3}}$$ valable loin du dipôle

[On aurait pu calculer $\vec{E}$ directement en cartésiennes en choisissant l'axe de z le long de $\vec{p}$: $\vec{p} = p\,\vec{u}_z$

$$\Rightarrow \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{pz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{pz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\frac{pz}{(\;)^{3/2}}\,\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\frac{pz}{(\;)^{3/2}}\,\vec{u}_z$$
$$= pz\left(-\frac{3x}{r^5}\vec{u}_x - \frac{3y}{r^5}\vec{u}_y - \frac{3z}{r^5}\vec{u}_z\right) + \frac{p}{r^3}\vec{u}_z$$
$$= \vec{p}\cdot\vec{r}\left(-\frac{3\vec{r}}{r^5}\right) + \frac{\vec{p}}{r^3} = -\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}}{r^3}$$
]

2. $A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3}$

= potentiel vecteur créé par le dipôle magnétique $\vec{m}$ dans l'approx. dipolaire càd loin du dipôle : $r \gg a \simeq$ taille de la distr. de courants.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{rot}\, \vec{A}(\vec{r})$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{rot}\left(\frac{1}{r^3} \vec{m} \wedge \vec{r}\right)$$

or $\vec{rot}(f\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge (f\vec{A}) = \vec{\nabla} f \wedge \vec{A} + f \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$
$$= \vec{grad} f \wedge \vec{A} + f\, \vec{rot}\, \vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\underbrace{\vec{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right)}_{= -\frac{3}{r^4}\vec{u_r}} \wedge (\vec{m} \wedge \vec{r}) + \frac{1}{r^3} \vec{rot}(\vec{m} \wedge \vec{r})\right]$$

choisissons l'axe des z tq $\vec{m} = m\, \vec{u_z}$

$$\vec{m} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ m \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -my \\ mx \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{rot}(\vec{m} \wedge \vec{r}) = \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -my \\ mx \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ m+m \end{vmatrix} = 2m\, \vec{u_z} = 2\vec{m}$$

[En fait c'est le calcul de l'exo 5 du TD1 d'em2]

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(\vec{r})} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[-3\, \vec{u_r} \wedge (\vec{m} \wedge \vec{u_r}) + 2\vec{m}\right]$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[-3\left(\vec{u_r} \cdot \vec{u_r}\, \vec{m} - \vec{u_r} \cdot \vec{m}\, \vec{u_r}\right) + 2\vec{m}\right]$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[-3\vec{m} + 3(\vec{m} \cdot \vec{u_r})\, \vec{u_r} + 2\vec{m}\right]$$
$$\boxed{= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{u_r})\vec{u_r} - \vec{m}}{r^3}}$$ valable loin du dipôle

m̂ forme que $\vec{E}(\vec{r})$!