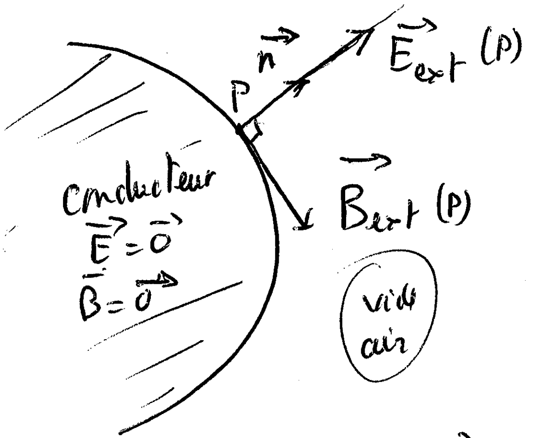
Propagation entre deux plans conducteurs parfaits

Rappel: Dans un conducteur parfait $\gamma \to +\infty$ conductivité $\Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$

$\vec{B} = \vec{0}$ (ou $= c^{te}$)

cf exo 1 serie IV

conditions au limites au voisinage d'un conducteur parfait



à l'extérieur du conducteur au voisinage de $P \in$ surface du conducteur

(d'après relations de passage entre milieu)

- $\vec{E}_{ext}(P) = \dfrac{\sigma(P)}{\varepsilon_0}\vec{n}$ (1)

  $\vec{E}_{ext}(P) = \lim\limits_{\substack{M \to P \\ \text{à l'ext}}} \vec{E}(M)$

  $\vec{n}$ ↳ unitaire $\perp$ surface

- $\vec{B}_{ext}(P) = \mu_0 \vec{j}_s(P) \wedge \vec{n}$ (2)

exercice 2: on considère $\vec{E}(M,t) = \underbrace{E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx)}_{E_y} \vec{u_y}$

(entre 2 conducteur en $z = 0$ et $z = a$)

$\vec{E}(M,t) = E_y \vec{u_y}$

1/ à la surface des conducteurs, càd en $z = 0$ et $z = a$ on a:

$\vec{E} = \vec{0}$ ce qui est compatible avec la condition (1).

2/ ⚠ a priori ce n'est pas une OPPM car $E_y = f(z) \cos(\omega t - kx)$

↑ dépend de z

donc on ne peut pas utiliser la relation de structure des OPPM

il faut revenir aux équations de Maxwell

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -E_0 \dfrac{\pi}{a} \cos\dfrac{\pi z}{a} \cos(\omega t - kx) \\ 0 = 0 \\ \partial E_y/\partial x = E_0 k \sin\dfrac{\pi z}{a} \sin(\omega t - kx) \end{vmatrix}$$

en intégrant / temps, sans considérer de terme constant car on s'intéresse aux ondes :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{B} &= E_0 \frac{\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{\pi}{a} z\right) \sin(\omega t - kx)\, \vec{u_x} \\ &+ E_0 \frac{k}{\omega} \sin \frac{\pi z}{a} \cos(\omega t - kx)\, \vec{u_z}\end{aligned}} \quad (3)$$

Rmq : $\vec{B}$ n'est pas transverse ($\vec{B}$ a une composante // $\vec{k} = k\vec{u_x}$)
$\hookrightarrow \neq$ OPPM

Rmq : $\vec{B}$ vérifie bien les conditions aux limites (2) en $z=0$ et $z=a$

$$\left.\begin{aligned}\vec{B}(z=0) &\; // \; \vec{u_x} \\ \vec{B}(z=a) &\; // \; \vec{u_x}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{B}(z=0 \,;\, z=a) \; // \text{ surface des conducteurs}$$

3°) Relation de dispersion

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{éq. d'Alembert} \quad \underset{\text{ici}}{\Rightarrow} \quad \Delta E_y = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + 0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$-k^2 \cancel{E_0} \cancel{\sin \frac{\pi z}{a}} \cancel{\cos(\omega t - kx)} - \frac{\pi^2}{a^2} \cancel{E_0} \cancel{\sin \frac{\pi z}{a}} \cancel{\cos(\omega t - kx)} = -\frac{\omega^2}{c^2} \cancel{E_0} \cancel{\sin \frac{\pi z}{a}} \cancel{\cos(\omega t - kx)}$$

$$\Rightarrow \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} \quad (4) \text{ relation de dispersion}$$

L'onde ne peut se propager que si k est réel donc il faut $k^2 > 0$

soit $\underline{\underline{\omega > \omega_c = \frac{\pi c}{a}}}$

4) $\omega > \omega_c$ donc $k = \pm \dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c}$

sens de propagation de l'onde

on choisit $k = + \dfrac{\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}}{c}$ onde vers $x \to$ ~~+oo~~

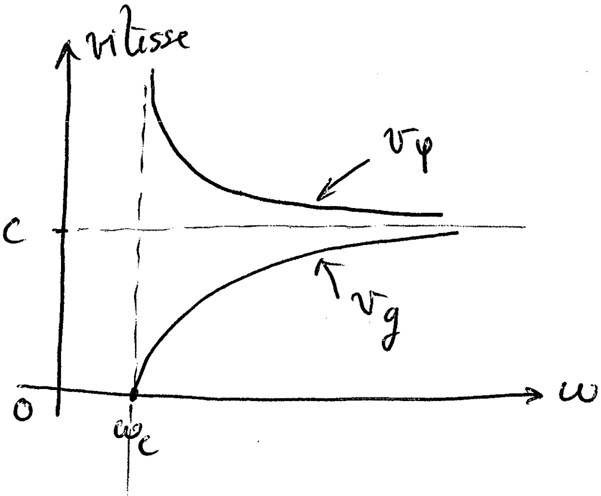
vitesse de phase : $\boxed{v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}}$

vitesse de groupe $v_g = \dfrac{\partial \omega}{\partial k}$:

D'après la relation de dispersion (4) en différenciant : $2k\,dk = \dfrac{2\omega}{c^2}\,d\omega$

donc $\boxed{v_g = \dfrac{kc^2}{\omega} = \sqrt{\dfrac{\omega^2 - \omega_c^2}{\omega^2}}\; c}$

Rmq : $v_g \times v_\varphi = c^2$



Rmq : $v_\varphi > c$; mais c'est la vitesse de la phase qui n'a pas de réalité physique

Rmq $v_g < c$: vitesse de l'impulsion et de l'énergie (voir question suivante)

Rmq v_φ et v_g dépendent de ω : milieu dispersif.

5) $\langle w_{elm} \rangle = \underbrace{\dfrac{\varepsilon_0}{2}\langle E^2 \rangle}_{\langle w_{el} \rangle} + \underbrace{\dfrac{1}{2\mu_0}\langle B^2 \rangle}_{\langle w_{mag} \rangle}$

$$< w_{el} > = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 \sin^2 \frac{\pi z}{a} \times \frac{1}{2}$$

$< \cos(\omega t - kx) > = \frac{1}{2}$

$$< w_{mag} > = E_0^2 \frac{\pi^2}{a^2 \omega^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{a} z\right) \underbrace{< \sin^2(\ldots) >}_{= 1/2} + E_0^2 \frac{k^2}{\omega^2} \sin^2 \frac{\pi z}{a} \underbrace{\langle \cos^2(\ldots) \rangle}_{= 1/2}$$

$$\text{or } \frac{\pi^2}{a^2 \omega^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{k^2}{\omega^2} \quad \text{d'après (4)}$$

$$\text{donc } < w_{elm} > = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \left[1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \cos \frac{2\pi z}{a} \right]$$

car $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$
et $-\sin^2\theta + \cos^2\theta = \cos 2\theta$

$$< \mathcal{E}_{elm} > = \iiint_{\text{parallélipipède}} < w_{elm} > d\tau = \boxed{\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} L \ell a}$$

$$\text{car } \int_0^a \cos \frac{2\pi z}{a} dz = \left[\frac{a}{2\pi} \sin \frac{2\pi z}{a} \right]_0^a = 0$$

6) $$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{E_y B_x}{\mu_0} (-\vec{u_z}) + \frac{E_y B_z}{\mu_0} \vec{u_x}$$

avec $\vec{B} = B_x \vec{u_x} + B_z \vec{u_z}$ d'après (3)

$$< \vec{\Pi} > = -\frac{1}{\mu_0} < E_y B_x > \vec{u_z} + < E_y B_z > \frac{1}{\mu_0} \vec{u_x}$$

$$< E_y B_x > = + \frac{E_0^2}{a\omega} \pi \sin \frac{\pi z}{a} \cos \frac{\pi z}{a} \underbrace{\langle \cos(\omega t - kx) \sin(\omega t - kx) \rangle}_{\frac{1}{2}\langle \sin 2(\omega t - kx) \rangle = 0}$$

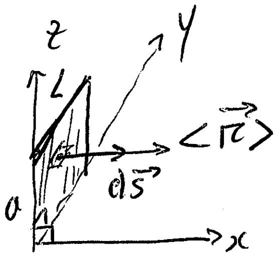
$$= 0$$

$$< E_y B_z > = \frac{E_0^2 k}{\omega} \sin^2 \frac{\pi z}{a} \underbrace{< \cos^2(\omega t - kx) >}_{1/2}$$

donc
$$\boxed{\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{E_0^2 k}{2\mu_0 \omega} \sin^2 \frac{\pi z}{a} \, \vec{u}_x}$$

flux de $\vec{\pi}$ traversant une section $a \times L$, perpendiculaire à $\vec{u_x}$

$$\langle \phi \rangle = \iint_{\text{Section}} \langle \vec{\pi} \rangle \cdot \underbrace{\vec{dS}}_{= dy\, dz\, \vec{u}_x}$$



$$= \frac{E_0^2 k}{2\mu_0 \omega} \underbrace{\int_0^L dy}_{L} \underbrace{\int_0^a \sin^2 \frac{\pi z}{a} \, dz}_{\hookrightarrow \int_0^a \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi z}{a}\right) dz = \frac{a}{2}}$$

$$\boxed{\langle \phi \rangle = \frac{E_0^2 k}{4\mu_0 \omega} a L}$$

7) Energie moyenne traversant la section $S = aL$ pendant dt

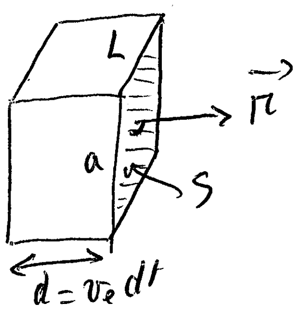
$$\langle \phi \rangle dt = \frac{E_0^2 k}{4\mu_0 \omega} a L \, dt$$

Soit $\vec{v_e}$ la vitesse de l'énergie $\vec{v_e} = v_e \vec{u_x}$; l'énergie qui traverse S pendant dt se trouvait (à t) dans le parallélépipède $aL \times d$ avec $d = v_e \, dt$

donc d'après 5) $\langle \phi \rangle dt = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} L a \, v_e \, dt$

ainsi $v_e = \dfrac{k}{\omega} \dfrac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = \dfrac{k c^2}{\omega} = v_g$

donc $\underline{\underline{v_e = v_g}}$ et on a bien $v_e < c$



8) $\vec{E} = E_0 \sin\frac{\pi z}{a} \cos(\omega t - kx)\,\vec{u_y}$

$= \frac{E_0}{2}\left[\sin\left(\omega t - kx + \frac{\pi z}{a}\right) - \sin\left(\omega t - kx - \frac{\pi z}{a}\right)\right]\vec{u_y}$

[car $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$]

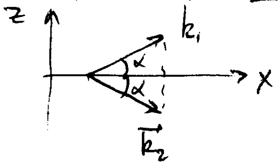
$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}}$

avec $\vec{E_1} = -\frac{E_0}{2} \sin\left(\omega t - kx - \frac{\pi z}{a}\right)\vec{u_y} = -\frac{E_0}{2}\sin(\omega t - \vec{k_1}\cdot\vec{r})\,\vec{u_y}$

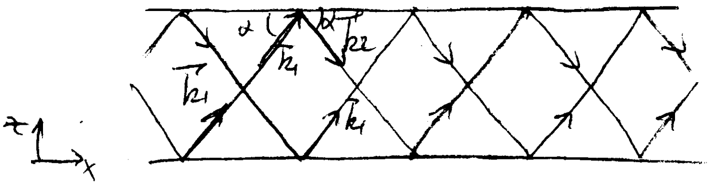
$\vec{E_2} = \frac{E_0}{2}\sin\left(\omega t - kx + \frac{\pi z}{a}\right)\vec{u_y} = \frac{E_0}{2}\sin(\omega t - \vec{k_2}\cdot\vec{r})\,\vec{u_y}$

avec $\vec{k_1} = k\,\vec{u_x} + \frac{\pi}{a}\vec{u_z}$

$\vec{k_2} = k\,\vec{u_x} - \frac{\pi}{a}\vec{u_z}$



$\Rightarrow$ $\vec{E}$ est la superposition de 2 OPPM de vecteurs d'onde $\vec{k_1}$ et $\vec{k_2}$

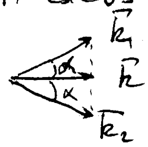


$\Rightarrow$ l'onde dans le guide est la superposition de 2 OPPM correspondant aux ondes réfléchies par les plans càd se propageant en zig-zag.

Rq : $\|\vec{k_1}\| = \sqrt{k^2 + \frac{\pi^2}{a^2}} = \|\vec{k_2}\| = \frac{\omega}{c}$ d'après 3°)

↳ normal : il s'agit d'OPPM dans le vide.

Rq : $\frac{\vec{k_1} + \vec{k_2}}{2} = k\,\vec{u_x} = \vec{k}$



$\Rightarrow \|\vec{k}\| = \|\vec{k_1}\|\cos\alpha = \frac{\omega}{c}\cos\alpha$

$\Rightarrow v_g = \frac{kc^2}{\omega} = c\cos\alpha < c$: la propagation de l'énergie est plus lente avec une onde guidée qu'avec une onde libre se propageant en ligne droite !

D'après la relation de dispersion : $k^2 + \frac{\pi^2}{a^2} = \frac{\omega^2}{c^2}$ avec $k = \frac{\omega}{c}\cos\alpha$

$\Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2}\cos^2\alpha + \frac{\pi^2}{a^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha = \frac{\pi^2 c^2}{a^2\omega^2}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\pi c}{a\omega}$.