

**Examen Electromagnétisme 3 : 2h**  
Documents, calculatrices, portables interdits

Les 2 exercices sont indépendants. Le barème indiqué est approximatif.

**Exercice 1 (Electromagnétisme dans un milieu supraconducteur) (10 pts)**

Un milieu supraconducteur présente une résistivité nulle au dessous d'une certaine température critique dite  $T_c$ ,  $T_c = 4.1$  K pour le mercure. Très récemment (mars 2023) des supraconducteurs à température ambiante ont été découverts expérimentalement mais ces résultats sont encore très controversés. Un autre effet remarquable d'un matériau supraconducteur est l'effet Meissner, qui est une expulsion des lignes de champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur. Ainsi, en présence d'un champ magnétique appliqué, un matériau supraconducteur réagit en créant un champ magnétique tel que le champ magnétique total est nul à l'intérieur du supraconducteur. On se propose ici d'étudier quelques propriétés électromagnétiques d'un milieu supraconducteur en supposant l'équation de London à l'intérieur d'un supraconducteur qui relie la densité volumique de courant  $\vec{j}$  au potentiel vecteur  $\vec{A}$  :

$$\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{A} \quad (1)$$

où  $\lambda$  est la longueur de London.

1) On se place dans le cas statique dans toute cette question. Le matériau supraconducteur est une plaque d'épaisseur  $2e$  qui est contenue entre les plans  $z = e$  et  $z = -e$  d'un référentiel  $Oxyz$ . On supposera les plaques infinies dans les directions  $x$  et  $y$  et on négligera ainsi les effets de bord dans ces directions. Un champ magnétique uniforme  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_x$  est appliqué dans tout l'espace.

a) Rappeler la relation entre  $\vec{H}$  et  $\vec{B}$  dans un milieu magnétique. Donner aussi celle entre l'aimantation  $\vec{M}$  et  $\vec{H}$ . En sachant que le champ magnétique est nul à l'intérieur d'un supraconducteur, déduire de ces relations la valeur de la susceptibilité magnétique  $\chi_m$  d'un supraconducteur. Que vaut  $\mu_r$ ? Comment appelle-t-on un tel milieu magnétique?

b) On cherche à déterminer l'expression du champ magnétique  $\vec{B}$  à l'intérieur de la plaque supraconductrice. On s'attend à ce qu'il ne soit pas nul près des bords et décroisse rapidement vers 0 quand on pénètre de plus en plus dans le supraconducteur. On suppose la relation de continuité :  $\vec{B}(z = -e) = \vec{B}(z = e) = B_0 \vec{u}_x$ . Justifier que  $\vec{B} = \vec{B}(z)$ . On admettra pour la suite que  $\vec{B} = B(z) \vec{u}_x$ . En utilisant la relation de London (1), déterminer l'équation différentielle sur le champ magnétique  $\vec{B}$  à l'intérieur de la plaque supraconductrice. Trouver alors  $B(z)$ . Tracer cette fonction pour  $-e \leq z \leq e$ .

Si  $\lambda \ll e$ , que devient  $B(z)$  au voisinage des surfaces  $z = \pm e$ ? En déduire l'interprétation physique de la longueur de London.

c) En déduire la densité volumique de courant  $\vec{j}$  à l'intérieur de la plaque. Tracer cette fonction pour  $-e \leq z \leq e$ . Quelle est la nature du plan  $Oxy$  pour le problème? Que peut-on en déduire? Pouvez vous justifier alors que le champ magnétique à l'extérieur de la plaque est bien  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_x$ ?

2) On considère le problème dans le régime non statique. On s'intéresse à la nature de la propagation d'une onde électromagnétique dans l'état mixte d'un supraconducteur où coexistent un état supraconducteur, caractérisé par la loi de London (1), et un état conducteur normal, caractérisé par la loi d'Ohm sous forme locale  $\vec{j}_N = \gamma \vec{E}$  ( $\gamma$  étant la conductivité). La densité volumique de courant totale dans le milieu est ainsi :  $\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{A} + \vec{j}_N$ .

a) Déterminer l'équation de propagation sur le champ magnétique  $\vec{B}$ .

b) On cherche une solution en onde monochromatique progressive le long d'un axe  $z \geq 0$  sous la forme suivante :

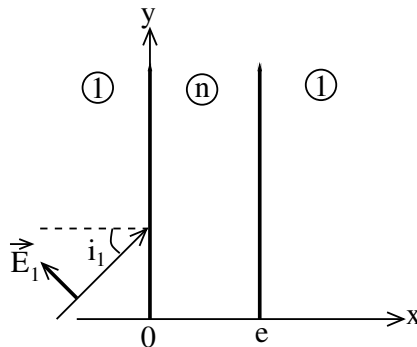
$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - kz)}, \quad (2)$$

où  $\vec{B}_0$  est uniforme et constant. Déterminer la relation de dispersion du problème. En déduire que  $k$  est nécessairement un nombre complexe :  $k = k_1 + ik_2$ . Donner deux équations sur  $k_1$  et  $k_2$  en fonction de  $\omega$ . Que peut-on dire physiquement sur  $k_2$ ? Si  $\gamma = 0$ , que se passe-t-il? Quel est donc l'effet majeur d'une conductivité non nulle?

c) Introduire une pulsation caractéristique  $\omega_S$  associée à la partie supraconductrice et de même une pulsation  $\omega_N$  pour la partie normale. Que se passe-t-il à basse fréquence et à haute fréquence?

### Ex. 2. Transmission à travers une lame de verre (10 pts)

Une OPPM ( $\vec{E}_1, \vec{B}_1$ ) se propage dans l'air et arrive sur une lame avec un angle d'incidence  $i_1$ . La lame est constituée d'un milieu diélectrique  $lhi$  parfait non magnétique et transparent d'indice  $n$ . Le champ électrique  $\vec{E}_1$  de l'onde incidente est polarisé rectilignement *dans le plan d'incidence*, comme indiqué sur la figure. On note  $E_0$  son amplitude et  $\vec{k}_1$  son vecteur d'onde.



On cherche à déterminer l'angle d'incidence  $i_1$  pour lequel l'onde est intégralement transmise à travers la lame. On considérera donc que l'onde ici ne subit aucune réflexion sur les interfaces et on notera ( $\vec{E}_t, \vec{B}_t$ ) l'onde transmise en  $x = 0$  et ( $\vec{E}_2, \vec{B}_2$ ) l'onde transmise en  $x = e$ . On admettra que ces ondes transmises sont des OPPM polarisée rectilignement *dans le plan d'incidence* de même pulsation  $\omega$  que l'onde incidente. Et on notera les coefficients de transmission en amplitude  $\underline{t}$  et  $\underline{t}'$  en  $x = 0$  et  $x = e$  respectivement.

1. Déterminer l'angle de réfraction  $i_2$  de l'onde à la sortie de la lame.
2. Représenter les champs électrique et magnétique de l'onde incidente et des deux ondes transmises en justifiant et donner leurs expressions.
3. Ecrire les relations de passage de l'onde électromagnétique à chaque interface.
4. En déduire les expressions des coefficients de transmission en amplitude  $\underline{t}$  et  $\underline{t}'$ . Interpréter les résultats obtenus du point de vue de l'optique physique.
5. Définir et calculer le coefficient de transmission en énergie à travers la lame. Commenter.
6. En déduire l'angle d'incidence  $i_1$  pour lequel l'onde est intégralement transmise à travers la lame d'indice  $n$ . Reconnaissez-vous cet angle? Commenter.