Ex 1 : $\boxed{\text{Onde em dans un milieu diélectrique – Relations de Descartes}}$

Questions de cours

Par défaut, on suppose les diélectriques parfaits : $\rho_\ell = 0$, $\vec{j}_\ell = \vec{0}$, $\vec{j}_{s\ell} = \vec{0}$

non magnétiques : $\mu_r = 1$
$\vec{j}_{sm} = \vec{0}$, $\vec{j}_m = \vec{0}$

$\Rightarrow$ les seuls charges et courants dans ces milieux sont ceux de polarisation $\rho_P = -\operatorname{div}\vec{P}$; $\vec{j}_P = \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ et $\sigma_P = \vec{P}.\vec{n}$

1°) Eq. de Maxwell dans diélectriques lhi

- $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho_P}{\varepsilon_0} = -\dfrac{\operatorname{div}\vec{P}}{\varepsilon_0} = -\operatorname{div}\dfrac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \operatorname{div}\vec{D} = 0$

avec $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ = déplacement électrique

or pr un milieu lhi $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \Rightarrow \boxed{\operatorname{div}\vec{E} = 0}$

- $\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$
- $\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$
- $\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}} = \mu_0\left(\vec{j}_P + \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\left(\dfrac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

$\boxed{= \mu_0\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$ pour lhi

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{les éq. de Maxwell dans un diélectrique lhi s'écrivent comme dans le vide en changeant } \varepsilon_0 \text{ en } \varepsilon}$

↳ résultat de cours à connaître !

2°) Le calcul est le m̂ que dans le vide en changeant ε_0 par ε ...

- $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}) = \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{E}) - (\vec{\nabla}.\vec{\nabla})\vec{E} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\underbrace{\operatorname{div}\vec{E}}_{=0}) - \Delta\vec{E}$

$$\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{E}) = -\vec{rot}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\,\vec{rot}\,\vec{B} = -\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

↳ éq. de propagation de type d'Alembert avec la vitesse de propagation de l'onde $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{n}$ si milieu transparent

↳ on retrouve bien la m éq. de propag. que ds le vide en changeant ε_0 en ε

- Relation de structure d'une OPPM

on cherche des sol. de l'éq. de propagation de la forme :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

↳ complexe pr avoir polarisation qq

on remplace dans l'éq. de Maxwell-Faraday, sachant que

$$\vec{\nabla} = -i\vec{k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} = i\omega$$

$$\vec{rot}\,\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}}$$ ↳ m que dans le vide

- Relation de dispersion

On remplace $\underline{\vec{E}}$ dans l'éq. de propagation :

$$\Delta \underline{\vec{E}} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\,\underline{\vec{E}} = \frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} \Leftrightarrow -k^2 \underline{\vec{E}} = -\frac{\varepsilon_r}{c^2}\omega^2 \underline{\vec{E}}$$

$$\Rightarrow \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r}$$ la m que dans le vide en changeant ε_0 par ε

- Si le milieu est transparent il n'absorbe pas les ondes visibles

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_r \text{ est réel}} \quad \text{et} \quad \boxed{n = \sqrt{\varepsilon_r}}$$

$$\Rightarrow \boxed{k = n\frac{\omega}{c} = n k_0}$$

↳ dans le vide

[On retrouve bien le résultat connu : v_φ = vit. de propag. d'une OPPM $= \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{n}$]

[En général, le milieu est absorbant pour certaines gammes de pulsations

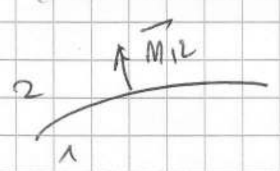
⇒ dans ce cas $\underline{\varepsilon_r}(\omega)$ est complexe

⇒ $\underline{k}(\omega)$ —— : $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\underline{\varepsilon_r}$

⇒ $\underline{n}(\omega)$ —— : $\underline{n}^2 = \underline{\varepsilon_r}$]

3°) Relations de passage

• <u>entre 2 milieux qcq :</u>



$$\left.\begin{array}{l} \vec{E}_2^{\,/\!/} = \vec{E}_1^{\,/\!/} \\ \vec{D}_2^{\,\perp} - \vec{D}_1^{\,\perp} = \sigma_\ell\, \vec{n}_{12} \\ \vec{B}_2^{\,\perp} = \vec{B}_1^{\,\perp} \\ \vec{H}_2^{\,/\!/} - \vec{H}_1^{\,/\!/} = \vec{j}_{s\ell} \wedge \vec{n}_{12} \end{array}\right\}$$

valables en tt pt de l'interface $\forall t$

• <u>entre 2 milieux lhi transparents</u>

$\sigma_\ell = 0$ et $\vec{j}_{s\ell} = \vec{0}$

$\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \vec{E}_1 = \varepsilon_0 n_1^2 \vec{E}_1$ et $\vec{D}_2 = \varepsilon_0 n_2^2 \vec{E}_2$

$\vec{H}_1 = \dfrac{\vec{B}_1}{\mu_0} - \vec{M} = \dfrac{\vec{B}_1}{\mu_0}$ et $\vec{H}_2 = \dfrac{\vec{B}_2}{\mu_0}$

⇒ les relations de passage s'écrivent :

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{E}_2^{\,/\!/} = \vec{E}_1^{\,/\!/} \\ n_2^2\, \vec{E}_2^{\,\perp} = n_1^2\, \vec{E}_1^{\,\perp} \\ \vec{B}_2 = \vec{B}_1 \end{array}}$$

4°) Démonstration des lois de Descartes

- Onde incidente : OPPM de polarisation qcq

$\Rightarrow$ de la forme $\underline{\vec{E_i}} = \underline{\vec{E_{oi}}}\, e^{i(\omega_i t - \vec{k}_i . \vec{r})}$

- Interface plan $\Rightarrow$ Il est raisonnable de penser que l'interface conserve la structure d'onde plane pour les ondes réfléchie et transmise

$\Rightarrow \underline{\vec{E_r}} = \underline{\vec{E_{or}}}\, e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r . \vec{r})}$

$\underline{\vec{E_t}} = \underline{\vec{E_{ot}}}\, e^{i(\omega_t t - \vec{k}_t . \vec{r})}$

$\hookrightarrow$ $\underline{\vec{E_{or}}}, \underline{\vec{E_{ot}}}$ sont complexes a priori, car leur polarisation est inconnue et il peut y avoir des déphasages à la réflexion et/ou transmission

(a) $\underline{\vec{E_i}}, \underline{\vec{E_r}}, \underline{\vec{E_t}}$ vibrent à la m pulsation ω car les milieux étant linéaires, les charges liées à l'interface sont excitées par l'onde incidente et mises en mvt forcé à la m pulsation que l'onde incidente

$\Rightarrow$ elles rayonnent et émettent des ondes réfléchie et transmise de m pulsation que l'onde incidente

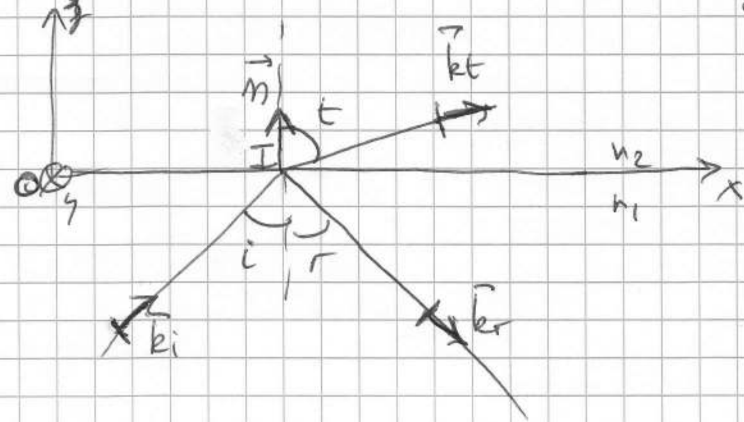
$\Rightarrow$ $\boxed{\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega}$

[Ça se démontre via les relations de passage, valables en $\forall$ point de l'interface $\underline{\underline{\forall t}}$: elles s'écrivent en $\vec{r} = \vec{0}$ (qu'on met sur l'interface pr simplifier)

$$\underline{\vec{E}}_{oi}^{//}\, e^{i\omega_i t} + \underline{\vec{E}}_{or}^{//}\, e^{i\omega_r t} = \underline{\vec{E}}_{ot}^{//}\, e^{i\omega_t t}$$

ce qui est vérifié $\forall t$ ssi $\omega_i = \omega_r = \omega_t$]

(b) $$\boxed{\begin{aligned} \underline{\vec{E}}_i &= \underline{\vec{E}}_{0i}\, e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \\ \underline{\vec{E}}_r &= \underline{\vec{E}}_{0r}\, e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \\ \underline{\vec{E}}_t &= \underline{\vec{E}}_{0t}\, e^{i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} \end{aligned}}$$



(c) Dans les milieux lhi transparents, on a :

$$\boxed{\begin{aligned} \|\vec{k}_i\| &= \|\vec{k}_r\| = n_1 k_0 \\ \|\vec{k}_t\| &= n_2 k_0 \end{aligned}} \qquad \text{avec } k_0 = \frac{\omega}{c}$$

(d) • Ecrivons la relation de passage du champ électrique :

$$\left.\boxed{\begin{aligned} \vec{E}_1^{\,/\!/} &= \vec{E}_2^{\,/\!/} \\ n_1^2\, \vec{E}_1^{\perp} &= n_2^2\, \vec{E}_2^{\perp} \end{aligned}}\right\} \text{ en } z=0 \quad \forall x, y, t$$

• On va voir que la 1ère relation suffit :

$$\forall x,y,t : \quad \underline{\vec{E}}_{0i}^{/\!/}\, e^{i(\omega t - k_i^x x - k_i^y y)} + \underline{\vec{E}}_{0r}^{/\!/}\, e^{i(\omega t - k_r^x x - k_r^y y)} = \underline{\vec{E}}_{0t}^{/\!/}\, e^{i(\omega t - k_t^x x - k_t^y y)}$$

prenons $x=0 \Rightarrow$ on doit avoir $\underline{\vec{E}}_{0i}^{/\!/} e^{-ik_i^y y} + \underline{\vec{E}}_{0r}^{/\!/} e^{-ik_r^y y} = \underline{\vec{E}}_{0t} e^{-ik_t^y y} \quad \forall y$

ce qui est vérifié ssi $\boxed{k_i^y = k_r^y = k_t^y}$

de m̂ en prenant $y=0$, on mq : $\boxed{k_i^x = k_r^x = k_t^x}$

$\Rightarrow \vec{k}_i^{/\!/} = \vec{k}_r^{/\!/} = \vec{k}_t^{/\!/}$

• Ici $k_i^y = 0 \Rightarrow k_r^y = k_t^y = 0$

$\Rightarrow$ on a démontré la 1ère loi de Descartes

$\boxed{\vec{k}_r \text{ et } \vec{k}_t \text{ sont dans le plan d'incidence défini par } \vec{k}_i, \vec{n}}$

- $k_i^x = k_i \sin i = n_1 k_0 \sin i$

  $k_r^x = k_r \sin r = n_1 k_0 \sin r$

  $k_t^x = k_t \sin t = n_2 k_0 \sin t$

$$\Rightarrow n_1 \sin i = n_1 \sin r = n_2 \sin t$$

soit 2° loi de Descartes : $\boxed{i = r}$

3ᵉ loi de Descartes : $\boxed{n_1 \sin i = n_2 \sin t}$

- Condition de réflexion totale

on aura réflexion totale lorsqu'on n'aura plus de solution

k_t^z réel

↳ le milieu étant transparent, il n'absorbe pas le visible

$\Rightarrow k_t$ doit être réel

or $k_t^2 = k_t^{x^2} + k_t^{z^2} \Rightarrow$

$$\boxed{k_t^{z^2} = k_t^2 - k_t^{x^2}}$$
$$= n_2^2 k_0^2 - n_2^2 k_0^2 \sin^2 t$$
$$= n_2^2 k_0^2 - n_1^2 k_0^2 \sin^2 i$$
$$\boxed{= k_0^2 \left(n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i \right)}$$

Donc :

- si $n_2 > n_1 \sin i$: k_t^z est réel et l'onde est transmise
- si $n_2 < n_1 \sin i$: $k_t^{z^2} < 0 \Rightarrow k_t^z$ est imaginaire pur

$k_t^z = ik$ avec $k>0$ (car l'onde

$$\Rightarrow \underline{\vec{E}_t} = \underline{\vec{E}_{0t}}\, e^{i(\omega t - k_t^x x - ikz)}$$
$$= \underline{\vec{E}_{0t}}\, e^{kz}\, e^{i(\omega t - k_t^x x)}$$

↑ avec $k<0$ sinon e^{kz} diverge en $+\infty$

(milieu 2 dans région $z>0$)

$\Rightarrow$ on a une onde non plane se propageant selon $+\vec{u}_x$ càd $/\!/^t$ à l'interface

dont l'amplitude ↓ exponentiellement qd z ↑

$\Rightarrow$ c'est une onde évanescente selon z
qui ne se propage pas selon z (elle est stationnaire)
et ne cède pas d'énergie en moyenne au milieu n_2

$\Rightarrow$ on a réflexion totale

• la condition de réflexion totale s'écrit donc :

$$\sin i > \frac{n_2}{n_1}$$

soit $\boxed{i > i_c = \operatorname{Arcsin} \frac{n_2}{n_1}}$

i_c n'existant que si $\boxed{n_2 < n_1}$ (le rayon va vers milieu $-$ réfringent)

↳ (car $\sin i_c = \frac{n_2}{n_1}$ est tjs < 1)

↳ on retrouve bien la condition de réflexion totale de l'optique géométrique

[Rq : on aurait obtenu la m̂ chose si on avait écrit l'autre relation de passage par $\vec{E}$: $n_1^2\left[E_{0i}^{\perp} e^{i(\omega t - k_i^x x - k_i^y y)} + E_{0r}^{\perp} e^{i(\omega t - k_r^x x - k_r^y y)}\right] = n_2^2 E_{0t}^{\perp} e^{i(\omega t - k_t^x x - k_t^y y)}$]