Partiel Electromagnétisme 3 : 1h30

Documents, calculettes, portables interdits

Les 2 exercices sont indépendants. Le barème indiqué est approximatif.

Exercice 1 : Rayonnement du dipôle électrique oscillant (10 pts)

On considère un dipôle électrique oscillant caractérisé par un moment dipolaire est dirigé suivant l'axe Oz : $\vec{p}(t) = p_0 \cos \omega t \, \vec{u}_z$, $\vec{u}_z$ étant le vecteur unitaire selon la direction Oz. On s'intéresse à la puissance moyenne rayonnée à grande distance par ce dipôle en un point M très éloigné de la spire ($r = OM \gg a$, a étant la taille caractéristique du dipôle). On rappelle l'expression du potentiel vecteur $\vec{A}(M,t)$, à l'instant t, en un point M($\vec{r}$) dans la zone de rayonnement :

$$\vec{A}\,(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\dot{\vec{p}}\,(t - r/c)}{r}, \tag{1}$$

où $\dot{\vec{p}}(t) = d\vec{p}(t)/dt$.

1) • Rappeler les différentes hypothèses du cours conduisant à l'expression (1). En particulier, on précisera clairement les différentes relations entre les longueurs caractéristiques du problème, r, a et la longueur d'onde λ que l'on définira. Donner la définition de la zone de rayonnement d'un dipôle oscillant. On se placera toujours dans la suite de l'exercice dans cette zone.

2) • On donne l'expression du rotationnel d'un vecteur en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \vec{\mathrm{rot}}\vec{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\left(\sin\theta A_\varphi\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA_\varphi\right))}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta \\ &+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{u}_\varphi. \end{aligned} \tag{2}$$

Trouver les composantes du potentiel vecteur $\vec{A}$ (équation (1)) dans la base des coordonnées sphériques. En utilisant l'équation (2), déterminer **la contribution dominante** du champ magnétique

3) • Quelle équation de Maxwell allez-vous utiliser pour calculer le champ électrique $\vec{E}$ du dipôle électrique sachant que l'on a déterminé $\vec{B}\,(M,t)$? Justifier votre réponse.

4) • Montrer alors que le terme dominant du champ électrique dans la zone du rayonnement s'écrit de la manière suivante :

$$\vec{E}\,(M,t) \simeq \frac{g\,(t-r/c)\sin\theta\;\vec{u}_\beta}{r^\alpha}, \tag{3}$$

en précisant α, β et la fonction g. Commenter physiquement la forme obtenue et la structure de l'onde électromagnétique résultante.

5) • Déterminer la puissance moyenne rayonnée $(\mathcal{P})$ par le dipôle électrique oscillant à travers une sphère de centre O et de rayon r.

6) • Une échelle de courant maximal I_m peut être identifiée à partir du dipôle électrique oscillant : $I_m = \omega p_0/a$. La puissance moyenne rayonnée $(\mathcal{P})$ par le dipôle oscillant permet alors de définir une résistance rayonnée R_r comme étant la résistance d'un conducteur ohmique parcouru par un courant de valeur maximale I_m. Calculer ainsi R_r.

Exercice 2 : Champ dépolarisant (10 pts)

On considère un cylindre d'axe Oz, de rayon R et de hauteur H $(H \gg R)$, constitué d'un diélectrique parfait lhi et non magnétique, de susceptibilité électrique χ. Ce cylindre est placé dans un champ électrique uniforme $\vec{E}_0$ dirigé suivant l'axe Ox : $\vec{E}_0 = E_0\,\vec{u}_x$. Le vecteur polarisation $\vec{P}$ qui en résulte est également supposé uniforme : $\vec{P} = P\,\vec{u}_x$.

1. Déterminer la répartition de la distribution de charges de polarisation. Représentez-la qualitativement sur un schéma.
2. Calculer, en fonction de $\vec{P}$, le potentiel électrostatique V_P puis le champ électrostatique $\vec{E}_P$ créés par ce cylindre uniformément polarisé en tout point M de l'espace situé à une distance r de l'axe du cylindre.
   Vérifier que la norme du champ $\vec{E}_P$ s'exprime simplement en fonction de P.
3. Déterminer le champ électrique $\vec{E}_{int}$, l'excitation électrique $\vec{D}_{int}$ et le vecteur $\vec{P}$ à l'intérieur du diélectrique en fonction de ϵ_0, $\vec{E}_0$ et χ.
4. Déterminer les champs $\vec{E}_{ext}$ et $\vec{D}_{ext}$ à l'extérieur du diélectrique en fonction de ϵ_0, $\vec{E}_0$ et $\vec{P}$.
5. Vérifier les relations de passage pour les champs $\vec{E}$ et $\vec{D}$.