CY Cergy Paris Université
L3-P/MP - Electromagnétisme 3

Mars 2024

Partiel Electromagnétisme 3 : 1h30

Documents, calculettes, portables interdits

Les 2 exercices sont indépendants et le barème indiqué est approximatif. Un formulaire est donné à la fin du sujet.

Exercice 1 : Rayonnement du dipôle électrique oscillant (10 pts)

On considère un dipôle électrique oscillant constitué de deux charges opposées, $q(t)$ et $-q(t)$, séparées par une distance a. La charge varie périodiquement au cours du temps selon : $q(t) = q_0 \cos \omega t$. Le moment dipolaire est dirigé suivant l'axe Oz : $\vec{p}(t) = p(t)\,\vec{u}_z = aq_0 \cos \omega t\,\vec{u}_z$, $\vec{u}_z$ étant le vecteur unitaire selon la direction Oz. On s'intéresse à la puissance moyenne rayonnée à grande distance par ce dipôle en un point M très éloigné du dipôle ($r = OM \gg a$). Le terme dominant du potentiel scalaire V à l'instant t, en un point M($\vec{r}$) dans la zone du rayonnement est donné :

$$V\,(M,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{p}\,(t - r/c) \cos\theta}{r}, \tag{1}$$

θ étant l'angle entre $\vec{u}_z$ et $\vec{u}_r$ et $\dot{\vec{p}}(t) = d\vec{p}(t)/dt$.

1) • Commenter le comportement en fonction du temps du potentiel scalaire (1). Qu'attendez-vous comme décroissance en fonction de la distance pour un potentiel scalaire en électrostatique ? Donner un argument physique qualitatif simple qui explique le comportement de V (1) en fonction de r ?

2) • Rappeler la définition de la zone de rayonnement d'un dipôle oscillant c'est-à-dire la comparaison entre la distance r, a et la longueur d'onde λ que l'on définira. On se placera toujours dans la suite de l'exercice dans cette zone.

3) • Les potentiels électromagnétiques obéissent à la condition de jauge de Lorentz :

$$\mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

où $V\,(M,t)$ est le potentiel scalaire. On cherche le potentiel vecteur $\vec{A}$ sous la forme :

$$\vec{A}\,(M,t) = f(r,t)\vec{u}_z. \tag{3}$$

a) Pouvez-vous justifier la direction du potentiel vecteur ? Est-ce que f est une fonction de deux variables ou d'une seule variable ? Justifier votre réponse.

b) Calculer $\vec{A}$ dans la zone du rayonnement.

4) • Rappeler l'expression du champ électrique $\vec{E}$ en fonction de $\vec{A}$ et de V.

5) • En déduire le terme dominant du champ électrique $\vec{E}\,(M,t)$ dans la zone du rayonnement.

6) • Rappeler l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ en fonction du potentiel vecteur. En déduire le terme dominant du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ dans la zone du rayonnement. Trouver la relation entre $\vec{E}\,(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ dans la zone du rayonnement. Que pouvez-vous conclure ?

7) • Déterminer le vecteur de Poynting et sa moyenne dans le temps. En déduire la puissance moyenne rayonnée ($\mathcal{P}$) par le dipôle électrique oscillant à travers une sphère de centre O et de rayon r. Commenter physiquement ce résultat.

Exercice 2 : Polarisation d'une couche cylindrique (10 points)

On considère un fil conducteur infini sur Oz, chargé uniformément avec une densité de charge linéique λ_ℓ positive. On place autour de ce fil, une couche diélectrique cylindrique de longueur infinie, d'axe Oz, de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2. Le diélectrique est *lhi*, parfait (càd sans charges ni courants libres), non magnétique et de permittivité relative ϵ_r. Les seules charges libres présentes ici sont les charges linéiques sur le fil conducteur.

1. Déterminer le champ électrique $\vec{E}_0(M)$ créé par le fil conducteur infini en tout point M de l'espace.
2. Ecrire le théorème de Gauss pour le champ électrique total $\vec{E}(M)$ et pour l'excitation électrique $\vec{D}(M)$. On précisera bien toutes les grandeurs intervenant dans ces équations.
3. Etudier les symétries et invariances pour les champs $\vec{E}(M)$ et $\vec{D}(M)$.
4. Déterminer le champ $\vec{D}(M)$ en tout point M de l'espace. En déduire le champ $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace.
5. En déduire le champ électrique de polarisation créé par les charges de polarisation, $\vec{E}_p(M)$, en tout point M de l'espace. Pourquoi dit-on qu'il s'agit d'un champ dépolarisant ?
6. Déterminer le vecteur polarisation $\vec{P}(M)$ en fonction de ϵ_r, λ_ℓ et r.
7. Déterminer les densités de charges de polarisation. Commenter leurs signes. Que vaut la résultante des charges de polarisation dans une portion du diélectrique de hauteur h ? Commenter.
8. Retrouver l'expression du champ électrique de polarisation $\vec{E}_p(M)$ directement à partir des charges de polarisation.

Formulaire

Coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}
\vec{\text{grad}}\, f &= \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{u}_z \\
\text{div}\,\vec{C} &= \frac{1}{r}\frac{\partial\,(rC_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial C_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \\
\vec{\text{rot}}\,\vec{C} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial C_z}{\partial \theta} - \frac{\partial C_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta \\
&+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\,(rC_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z
\end{aligned}$$

Coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}
\vec{\text{grad}}\, f &= \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\vec{u}_\varphi \\
\text{div}\,\vec{C} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial\,(r^2C_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\,(C_\theta\sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi} \\
\vec{\text{rot}}\,\vec{C} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\,(\sin\theta C_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial C_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial C_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial\,(rC_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta \\
&+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\,(rC_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_\varphi
\end{aligned}$$