

TD n°1 : Rayonnement dipolaire

Site web du cours : <http://cpinettes.u-cergy.fr/L3-Electromag.html>

Test de cours n°6 [à faire à la maison]

1. On rappelle les expressions des potentiels retardés dans le vide, solutions des équations de Poisson dans la jauge de Lorentz :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{espace}} \frac{\rho(P, t - PM/c)}{PM} d\tau \quad \text{et} \quad \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{espace}} \frac{\vec{j}(P, t - PM/c)}{PM} d\tau$$

Expliquer leur signification physique.

2. On considère un dipôle oscillant à la pulsation ω et d'extension spatiale a autour du point O . Ecrire les approximations : dipolaire, non-relativiste et zone de rayonnement pour ce dipôle.
3. Quelles sont les propriétés du champ électromagnétique rayonné par un dipôle oscillant dans la zone de rayonnement ?
4. Citer des exemples de manifestations du rayonnement électromagnétique ?
5. Rappeler quelles sont les hypothèses du modèle classique de l'électron élastiquement lié. Préciser les vecteurs position \vec{r} et vitesse \vec{v} considérés dans ce modèle. En déduire le moment dipolaire induit sur un atome par la présence d'une onde électromagnétique.
6. Qu'est-ce que la diffusion de Rayleigh ? Quelle est la condition sur la taille des particules diffusantes pour que cette diffusion se produise ?

Expliquer l'origine de la couleur bleue du ciel et de la couleur rouge-orangé du Soleil couchant.

Quelle est la direction de polarisation de l'onde diffusée ?

Ex. 1 : Champ d'un dipôle électrique magnétique [à faire à la maison]

Sachant que dans l'approximation dipolaire (càd loin du dipôle), le potentiel électrostatique $V(\vec{r})$ créé par un dipôle électrostatique \vec{p} et le potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ créé par un dipôle magnétique \vec{m} s'écrivent :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Calculer le champ électrique créé par le dipôle \vec{p} et le champ magnétique créé par le dipôle \vec{m} dans l'approximation dipolaire.

Ex. 2 : Diffusion Rayleigh : couleur du ciel et du Soleil couchant, polarisation par diffusion

On décrit la diffusion de la lumière visible venant du soleil par l'atmosphère avec le modèle de l'électron élastiquement lié, qui conduit à des ordres de grandeur satisfaisants.

Un électron d'une molécule de l'atmosphère est mis en mouvement sous l'action du champ électromagnétique d'une onde excitatrice : $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$. Cet électron, de charge $-e$ et de masse m , est soumis, de la part du coeur de la molécule (noyaux et autres électrons) auquel il appartient, à une force de rappel élastique, $-m\omega_0^2 \vec{r}$, où \vec{r} est le vecteur position de l'électron par rapport au noyau supposé fixe. L'électron est aussi soumis à une force de frottement fluide, $-m\Gamma d\vec{r}/dt$, modélisant les pertes énergétiques par rayonnement et collisions. On admettra que la vitesse de l'électron est non relativiste.

Données du modèle : $\omega_0 = 2,3 \times 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$, $\Gamma = 10^8 \text{ s}^{-1}$, $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$.

1. En comparant les ordres de grandeur de la longueur d'onde du rayonnement visible et de la taille d'une molécule, montrer que l'on peut négliger la dépendance spatiale du champ électrique au niveau d'une molécule et prendre $\vec{r} = \vec{0}$ pour l'étude d'une molécule.

Ecrire l'équation du mouvement de l'électron et déterminer son déplacement $\vec{r}(t)$ en régime permanent. En déduire le moment dipolaire $\vec{p}(t)$ induit par l'onde excitatrice.

Simplifier l'expression de $\vec{p}(t)$ en tenant compte des valeurs numériques données et sachant que l'onde excitatrice est une onde lumineuse visible.

2. On rappelle que la puissance moyenne rayonnée par un dipôle électrique de moment $p(t) = p_0 \cos \omega t$ loin du dipôle est donnée par :

$$\langle P_{ray} \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$$

Exprimer $\langle P_{ray} \rangle$ en fonction de E_0 et ω .

En déduire la couleur du ciel en plein jour par temps clair. Expliquer en particulier pourquoi le ciel n'est pas violet.

On rappelle que la lumière visible est composée d'un spectre uniforme de longueurs d'onde comprises entre $0,4 \mu\text{m}$ (violet) et $0,75 \mu\text{m}$ (rouge).

3. L'atmosphère contient n molécules par unité de volume dont les rayonnements sont incohérents entre eux de telle sorte que la puissance moyenne diffusée par unité de volume est : $\langle p_d \rangle = n \langle P_{ray} \rangle$.

- (a) Montrer que $\langle P_{ray} \rangle$ peut se mettre sous la forme : $\langle P_{ray} \rangle = \sigma(\omega) I$, où I est l'intensité de l'onde excitatrice.

Quelle est la dimension de $\sigma(\omega)$? Quel est son sens physique?

- (b) Montrer, en faisant le bilan des puissances dans un petit cylindre de base S et de longueur dx suivant la direction de propagation, que l'intensité à la traversée d'une couche diffusante d'épaisseur x s'écrit :

$$I_\lambda(x) = I_0 e^{-x/L_\lambda}$$

Exprimer L_λ en fonction de n et $\sigma(\lambda)$.

- (c) A.N. : Estimer n pour un gaz parfait à la surface de la Terre dans les conditions normales de température et de pression. Puis, calculer L_λ pour le violet et pour le rouge. En déduire la couleur du soleil couchant.
4. En vous aidant des résultats du cours, expliquer pourquoi la lumière diffusée dans une direction perpendiculaire à la direction du Soleil est polarisée. Quelle est alors sa direction de polarisation ?

Ex. 3 : Durée de vie de l'atome classique

On adopte ici le modèle planétaire classique de Rutherford (1911) pour l'atome d'hydrogène : l'électron de masse m gravite sur une orbite circulaire de rayon r autour du proton supposé immobile.

Donnée : $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg.

1. Calculer la vitesse, la période de rotation et l'énergie mécanique de l'électron. Evaluer ces grandeurs pour une orbite de rayon $r_0 \approx 1 \text{ \AA}$.
2. Ecrire la puissance rayonnée par l'électron en fonction du rayon de l'orbite. On rappelle la *formule de Larmor* donnant la puissance rayonnée par une charge q non relativiste d'accélération a :

$$P_{ray} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

3. Quelle est la conséquence de cette émission de rayonnement sur le mouvement de l'électron ?
Discuter de la rapidité de cette évolution en comparant l'énergie rayonnée par l'électron pendant un tour à son énergie mécanique sur l'orbite r_0 .
4. Ecrire la conservation de puissance et en déduire l'évolution du rayon de l'orbite de l'électron, $r(t)$ en supposant que l'électron est sur l'orbite r_0 à $t = 0$.
5. Calculer la durée de vie τ de l'atome classique en fonction de r_0 . Faire l'A.N. et conclure.