

## TD n°3 : Milieux magnétiques

### Ex. 1 : Sphère uniformément aimantée

Une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$ , est constituée d'un milieu magnétique de susceptibilité magnétique  $\chi_m$ . La sphère est placée dans un champ appliqué uniforme :  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ . On suppose que la sphère acquiert une aimantation uniforme  $\vec{M} = M \vec{u}_z$ .

1. Donner la répartition des densités de courants d'aimantation.
2. Déterminer le potentiel vecteur et le champ magnétique créés par la sphère uniformément aimantée en tout point de l'espace en fonction de  $\vec{M}$ .

*On utilisera la méthode du champ auxiliaire comme dans l'exo 1 du TD n°2 et on pourra utiliser les résultats de l'exo 1 du TD n°1.*

Montrer que le champ magnétique à l'extérieur de la sphère est identique à celui qui serait créé par un dipôle magnétique de moment  $\vec{M}$  placé en  $O$ . Donner l'expression de  $\vec{M}$ .

3. Exprimer l'aimantation et le champ magnétique à l'intérieur de la sphère en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $\chi_m$  et  $\vec{B}_0$ .
4. Tracer qualitativement les lignes du champ magnétique créé par la sphère aimantée.

### Ex. 2 : Supraconductivité

La supraconductivité découverte en 1911 par Onnes pour le mercure se caractérise par deux propriétés. Au dessous d'une certaine température critique ( $T < T_c$ ,  $T_c = 4.2$  K pour le mercure), les matériaux supraconducteurs présentent *une résistivité nulle* : un courant électrique peut persister sans amortissement dans le supraconducteur. Et en présence d'un champ magnétique appliqué, un matériau supraconducteur réagit en créant un champ magnétique tel que le champ magnétique total est nul à l'intérieur du supraconducteur. Cette « expulsion » des lignes de champ dans un supraconducteur est appelée *effet Meissner*.

On se propose de donner ici une description phénoménologique de la supraconductivité due aux frères London (1935). On suppose que, dans l'état supraconducteur, les porteurs de charges, de charge  $q$ , de masse  $m$  et de densité  $n_S$ , se déplacent sans frottement et que le flot de charges mobiles est uniforme.

1. Montrer que, moyennant des hypothèses et approximations à indiquer, l'étude mécanique et électromagnétique du courant supraconducteur conduit à l'équation de London :

$$\vec{j} = - \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{A}$$

où  $\vec{j}$  est la densité volumique de courant dans le supraconducteur et  $\vec{A}$  le potentiel vecteur associé au champ magnétique  $\vec{B}$  à l'intérieur du supraconducteur. Exprimer la constante  $\lambda_L$  en fonction de  $\mu_0$ ,  $m$ ,  $q$  et  $n_S$  et donner sa dimension.

2. En se plaçant dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, déterminer l'équation différentielle satisfaite par le champ magnétique  $\vec{B}$  dans le supraconducteur. Un champ uniforme peut-il régner à l'intérieur d'un supraconducteur ?
3. Pour analyser la topographie du champ magnétique  $\vec{B}$  à l'intérieur d'un supraconducteur, on suppose que ce matériau occupe tout le demi-espace défini par les  $x \geq 0$ . Un champ magnétique statique et uniforme  $\vec{B}_{ext} = B_{ext} \vec{u}_z$  (somme du champ appliqué et du champ créé par les courants supraconducteurs) règne dans la région  $x < 0$ .
  - (a) Trouver l'expression de  $\vec{B}$  dans le supraconducteur.  
Donner une interprétation physique de  $\lambda_L$ .  
Ordre de grandeur : calculer  $\lambda_L$  sachant que dans les métaux supraconducteurs, on a  $n_S \sim 10^{28} \text{ m}^{-3}$  et que la masse de l'électron vaut  $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ . Conclusion ?
  - (b) Déterminer la densité de courant à l'intérieur d'un supraconducteur.  
Conclusion ?

### Ex. 3 : Sphère supraconductrice

On considère une sphère supraconductrice de centre  $O$ , de rayon  $R$  et de température inférieure à  $T_c$ , plongée dans un champ magnétique statique et uniforme :  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ . Le champ appliqué  $\vec{B}_0$  induit des courants superficiels à la surface du supraconducteur, lesquels créent à l'intérieur du supraconducteur une aimantation et un champ magnétique opposés à  $\vec{B}_0$ , qui « expulse » le champ magnétique à l'extérieur du supraconducteur (effet Meissner).

1. Montrer qu'un supraconducteur à  $T < T_c$  se comporte comme un matériau diamagnétique parfait ( $\chi_m = -1$ ). En déduire l'aimantation et la densité de courants d'aimantation surfaciques sur la sphère supraconductrice en fonction de  $\vec{B}_0$  [ on pourra utiliser les résultats de l'exo 1 ].
2. Montrer que les lignes du champ magnétique sont tangentes à la sphère au voisinage de la sphère. Tracer qualitativement les lignes du champ magnétique.
3. Une manifestation spectaculaire de la supraconductivité est la lévitation d'un aimant au dessus de la surface d'un matériau supraconducteur dont la température est inférieure à  $T_c$ . Expliquer qualitativement ce phénomène.