TD n^{o}5 : Guidage d'une onde électromagnétique

Ex. 1 : Guidage d'une onde entre deux plans conducteurs parfaits [*à faire à la maison*]

On considère deux plans conducteurs parfaits situés en $z = 0$ et $z = a$. On suppose que ces plans ont une extension très grande devant a et sont séparés par le vide.
On cherche à étudier la propagation d'une onde électromagnétique dans un tel système, dont le champ électrique est donné par :

$$\vec{E} = E_o \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos\left(\omega t - kx\right) \vec{u}_y$$

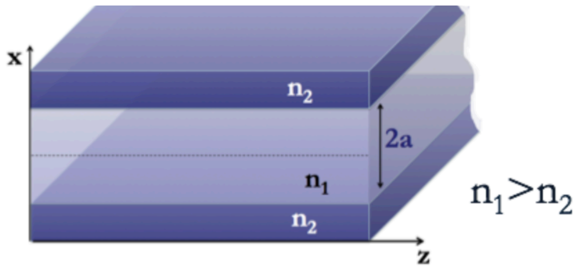
1. Montrer que que ce champ vérifie les conditions aux limites associées à un champ électrique.
2. Déterminer l'expression du champ magnétique de l'onde.
3. Déterminer la relation de dispersion du système. Montrer que la propagation n'est possible que pour des pulsations $\omega > \omega_c$ où l'on exprimera ω_c en fonction des paramètres du problème.

On se placera dans toute la suite du problème dans le cas $\omega > \omega_c$.

4. Calculer la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g de l'onde en fonction de ω. Tracer ces deux vitesses en fonction de ω. Les comparer à la vitesse de la lumière. Expliquer.
5. Déterminer l'énergie électromagnétique moyenne $\langle \mathcal{E}_{em} \rangle$ contenue dans un parallélépipède de volume $\Delta x \Delta y \Delta z$ avec $\Delta x = l$, $\Delta y = L$ et $\Delta z = a$.
6. Calculer la valeur moyenne dans le temps du vecteur de Poynting. En déduire le flux moyen $\langle \Phi \rangle$ correspondant à l'énergie transportée par l'onde à travers une section de hauteur a et de largeur L perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.
7. Montrer, qu'à partir de $\langle \mathcal{E}_{em} \rangle$ et $\langle \Phi \rangle$, on peut définir une vitesse de propagation de l'énergie v_e. Comparer cette vitesse à la vitesse de groupe v_g.
8. Montrer que l'on peut écrire le champ électrique comme la superposition de deux OPPM. Préciser les vecteurs d'onde $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ de ces deux ondes. Interpréter.

Ex. 2 : Guide d'onde plan diélectrique à saut d'indice

On souhaite étudier le guidage d'une onde électromagnétique dans une fibre optique et pour simplifier, on se place dans une géométrie bidimensionnelle, qui rend bien compte des propriétés fondamentales des fibres à saut d'indice.



On modélise donc une fibre optique par :
- un *coeur* compris entre les plans $x = \pm a$, diélectrique *lhi* transparent d'indice n_1
- une *gaine* située à $|x| > a$, diélectrique *lhi* transparent d'indice $n_2 < n_1$

Les deux diélectriques sont parfaits et non magnétiques.

On étudie la propagation dans la fibre d'ondes transverses électriques (TE) monochromatiques, de longueur d'onde dans le vide λ_0 et de la forme :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = f(x,y)\; e^{i(\omega t - \alpha z)}\; \vec{u}_y$$

On prendra comme valeurs numériques : $n_1 = 1,50$, $n_2 = 1,49$ et $\lambda_0 = 1,0\ \mu$m.

1. Montrer que la fonction $f(x,y)$ ne dépend pas de y.
2. Déterminer les expressions du champ magnétique dans le coeur et dans la gaine. L'onde est-elle transverse magnétique ? Commenter.
3. Ecrire les conditions aux limites vérifiées par les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$. En déduire les relations que doivent vérifier les fonctions $f(x)$ et $f'(x)$ aux interfaces.
4. Ecrire l'équation de propagation du champ électrique dans chacune des couches. On posera $k_i = n_i\ \frac{\omega}{c}$, avec $i = 1, 2$. En déduire, l'équation différentielle vérifiée par la fonction $f(x)$ dans chaque couche.
5. Donner, dans chaque couche, la forme des solutions de cette équation différentielle en fonction du signe de $k_i^2 - \alpha^2$.
6. Afin que la fibre soit effectivement un guide d'onde, elle ne doit pas rayonner d'énergie vers l'extérieur. On doit donc fixer les paramètres de la fibre de telle sorte que, suivant (Ox), l'onde soit stationnaire dans le coeur et évanescente dans la gaine. Montrer que cela impose la condition $k_2 < \alpha \leq k_1$.
7. On suppose cette condition vérifiée dans la suite et on pose $\beta^2 = k_1^2 - \alpha^2$ et $\xi^2 = \alpha^2 - k_2^2$, avec $\beta > 0$ et $\xi > 0$. Ecrire la forme générale de la fonction $f(x)$ dans les 3 régions.
8. Montrer que la symétrie du problème permet de chercher des fonctions $f(x)$ soit paires, soit impaires. Ecrire la forme générale de ces solutions.

9. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting dans chaque milieu. Commenter.
10. Montrer qu'une solution $f(x)$ paire n'est possible que si :
$$\tan(\beta a) = \frac{\xi}{\beta}$$
11. Procéder de même pour les solutions impaires et montrer que leur condition d'existence s'écrit :
$$\text{cotan}(\beta a) = -\frac{\xi}{\beta}$$
12. Représenter sur un même schéma l'allure des graphes donnant ξa en fonction de βa pour les deux types de solutions paires ou impaires.
13. En utilisant la relation :
$$\beta^2 + \xi^2 = k_1^2 - k_2^2$$
proposer une méthode graphique pour déterminer les valeurs de β et ξ pour les modes TE qui peuvent se propager dans la fibre.
14. Quelle analogie peut-on faire avec un système quantique simple ?
15. Montrer qu'il existe toujours un mode TE. Est-il pair ou impair ?
Ecrire la condition d'existence du m$^{\text{ième}}$ mode TE et vérifier qu'il existe pour ce mode une pulsation de coupure ω_{cm} que l'on déterminera.
16. Si le signal d'entrée, de longueur d'onde λ_0 dans le vide, se répartit sur plusieurs modes, comme chaque mode se propage à des vitesses différentes, l'onde s'étale lors de sa propagation et on risque d'avoir un chevauchement entre impulsions successives. Donc on a intérêt à choisir des fibres monomodes, dans lesquelles un seul mode de longueur d'onde donnée peut se propager, appelé mode fondamental.
    (a) Quelle est l'épaisseur maximale d'une telle fibre monomode ? A.N.
    (b) Représenter qualitativement l'amplitude de ce mode fondamental en fonction de x.
    (c) On introduit l'angle $\theta \in [0, \pi/2]$ tel que $\beta = k_1 \cos\theta$. Montrer que dans le coeur, le champ électrique correspondant au mode fondamental peut s'écrire comme la superposition de deux ondes planes.
    En considérant la condition de propagation dans le guide établie Q. 6, $k_2 < \alpha \leq k_1$, trouver l'inégalité que doit vérifier θ et en donner une interprétation physique.