TD n^{o}5 : Propagation dans un milieu conducteur et à la frontière vide/conducteur

Test de cours n°5 [*à faire à la maison*]

1. Qu'est-ce qu'un conducteur ohmique ? Donner un ordre de grandeur de la conductivité électrique d'un métal.
2. Comment modélise-t-on la conduction électrique dans un métal (modèle classique de Drude) ?
3. Rappeler l'expression de la résistance électrique d'une portion de fil d'un conducteur ohmique de conductivité électrique γ, longueur ℓ, section S.
4. Quelle est la puissance volumique reçue par un conducteur ohmique soumis à un champ $\vec{E}$?
5. Ecrire sans démonstration les équations de Maxwell simplifiées dans un conducteur ohmique excité à basse fréquence ($f \ll 10^{14}$ Hz).
6. Ecrire la condition sur le temps d'évolution T du champ électrique dans un conducteur ohmique de conductivité réelle γ dans l'ARQS. Cette condition est-elle satisfaite dans le domaine fréquentiel $f \ll 10^{14}$ Hz, où les métaux ont une conductivité réelle de l'ordre de $\gamma \simeq 10^7$ S.m^{-1} ?
7. Les équations de propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur ohmique de conductivité électrique γ dans le cadre de l'ARQS sont des équations de d'Alembert. Vrai ou faux ?
8. Qu'est-ce que l'effet de peau dans les conducteurs ohmiques ? Citer des applications pratiques de l'effet de peau.
9. Qu'est-ce qu'un conducteur ohmique parfait ? Comment les champs se réfléchissent-ils sur un conducteur ohmique parfait ?
10. Quelle est la différence entre atténuation et absorption ?
11. Par quoi est caractérisé un milieu absorbant ? Citer un exemple.
12. *[Complément, pas au programme] Qu'est-ce qu'une onde évanescente ?*
13. Ecrire les relations de passage du champ électromagnétique entre deux milieux 1 et 2 quelconques.
14. Ecrire les relations de passage du champ électromagnétique entre un conducteur parfait et le vide.
15. Une onde incidente $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kz)\, \vec{u}_x$ arrive en incidence normale sur un conducteur parfait qui occupe le demi-espace $z > 0$. Donner l'expression du champ réfléchi $\vec{E}_r$, puis du champ électrique total dans la région $z < 0$.

16. *[Complément, pas au programme] Considérons une cavité électromagnétique formée par deux plans conducteurs parfaits en $x = 0$ et $x = L$, l'espace entre ces 2 plans étant de l'air. On cherche ses modes propres sous la forme d'onde plane stationnaire harmonique (OPSH) :*
$$\vec{E}(x,t) = E_0\ \sin(kx + \psi)\ \cos(\omega t + \varphi)\ \vec{u}_y.$$
Déterminer les valeurs possibles de k et ψ.
17. Comment peut-on comprendre qualitativement la pression de radiation exercée sur un conducteur du point de vue électromagnétique ? et du point de vue corpusculaire ?
18. Qu'est-ce qu'un plasma ? Citer des exemples de plasmas. Pourquoi peut-on négliger la contribution des ions à la conductivité ? Quelles sont les ondes qui peuvent se propager dans un plasma ?

Ex. 1 : Onde électromagnétique dans un métal : effet de peau
[*à faire à la maison*]

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans un très bon conducteur ohmique (le cuivre) de conductivité γ. Le conducteur occupe le demi-espace $z > 0$ et on envoie sur le conducteur une onde électromagnétique de la forme :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp\left[i(\omega t - kz)\right]\vec{u}_x$$

On admettra que la loi d'Ohm reste valable dans les métaux pour des ondes de fréquence $f \leq 100$ GHz (ondes hertziennes).

1. Etablir l'équation satisfaite par la densité volumique de charges $\rho(M,t)$. Montrer que $\rho(M,t)$ tend rapidement vers 0.
2. Exprimer le rapport entre les densités volumiques de courant de déplacement et de conduction. Conclusion ?
3. Etablir l'équation de propagation du champ électrique. En déduire la relation de dispersion dans le métal.
4. En déduire la forme du champ $\underline{\vec{E}}$ dans le conducteur en fonction de :
$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma\mu_0\omega}}$$
Interpréter physiquement δ.
Calculer sa valeur pour les différentes valeurs de f données pour l'A.N.
Que se passe-t-il dans la limite $\gamma \to +\infty$ (conducteur parfait) ?
5. Calculer la puissance volumique moyenne cédée par le champ électromagnétique au conducteur.
6. Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

7. Comment protège-t-on un studio radio des ondes extérieures ?

   Pourquoi met-on une plaque métallique derrière la vitre d'un four à micro-ondes ? Le fait qu'elle soit percée de trous, pour pouvoir voir l'intérieur du four, est-il gênant ?

A.N. : $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F.m^{-1} ; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H.m^{-1} ; $\gamma \simeq 6 \times 10^7$ Ω^{-1}.m^{-1} (cuivre) ; $f = 50$ Hz (réseau EDF), 200 kHz (radio GO), 100 MHz (radio FM) et 1 GHz (micro-ondes).

Ex. 2 : Propagation entre deux plans conducteurs parfaits

On considère deux plans conducteurs parfaits situés en $z = 0$ et $z = a$. On suppose que ces plans ont une extension très grande devant a et sont séparés par le vide.
On cherche à étudier la propagation d'une onde électromagnétique dans un tel système, dont le champ électrique est donné par :

$$\vec{E} = E_o \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos\left(\omega t - kx\right) \vec{u}_y$$

1. Montrer que que ce champ vérifie les conditions aux limites associées à un champ électrique.
2. Déterminer l'expression du champ magnétique de l'onde.
3. Déterminer la relation de dispersion du système. Montrer que la propagation n'est possible que pour des pulsations $\omega > \omega_c$ où l'on exprimera ω_c en fonction des paramètres du problème.

On se placera dans toute la suite du problème dans le cas $\omega > \omega_c$.

4. Calculer la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g de l'onde en fonction de ω. Tracer ces deux vitesses en fonction de ω. Les comparer à la vitesse de la lumière. Expliquer.
5. Déterminer l'énergie électromagnétique moyenne $\langle \mathcal{E}_{em} \rangle$ contenue dans un parallélépipède de volume $\Delta x \Delta y \Delta z$ avec $\Delta x = l$, $\Delta y = L$ et $\Delta z = a$.
6. Calculer la valeur moyenne dans le temps du vecteur de Poynting. En déduire le flux moyen $\langle \Phi \rangle$ correspondant à l'énergie transportée par l'onde à travers une section de hauteur a et de largeur L perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.
7. Montrer, qu'à partir de $\langle \mathcal{E}_{em} \rangle$ et $\langle \Phi \rangle$, on peut définir une vitesse de propagation de l'énergie v_e. Comparer cette vitesse à la vitesse de groupe v_g.
8. Montrer que l'on peut écrire le champ électrique comme la superposition de deux OPPM. Préciser les vecteurs d'onde $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ de ces deux ondes. Interpréter.

Ex. 3 : Réflexion sur un conducteur parfait : pression de radiation

Une OPPM polarisée selon Ox et se propageant dans le vide dans le sens des z croissants, rencontre un métal parfait en $z = 0$. On désigne par E_0 l'amplitude du champ électrique, k la norme du vecteur d'onde et ω la pulsation.

1. Ecrire la relation de passage pour le champ $\vec{E}$ à la surface du conducteur. En déduire le champ électrique de l'onde réfléchie. Le comparer à celui de l'onde incidente. Ecrire le champ électrique total.
2. Déterminer les champs magnétiques incident et réfléchi. Les comparer. Ecrire le champ magnétique total. Le comparer au champ électrique total. Que peut-on dire de l'onde électromagnétique totale ?
3. Que vaut le coefficient de réflexion en énergie ?
4. Ecrire la relation de passage pour le champ magnétique à la surface du conducteur. En déduire le courant surfacique $\vec{j}_s$ à la surface du conducteur. Que vaut la densité surfacique de charges à la surface du conducteur ?
5. Montrer que la force exercée par le champ électromagnétique sur une surface dS du conducteur s'écrit : $d\vec{F} = \vec{j}_s \, dS \wedge \vec{B}_i(z = 0, t)$.
   En déduire la pression électromagnétique (appelée *pression de radiation*) exercée sur le conducteur.
6. Retrouver le résultat précédent en interprétant la lumière en terme de photons et en considérant le rebond des photons sur le métal parfait. Pour cela, exprimer la densité volumique moyenne de photons incidents $< n_i^* >$ en fct de la densité volumique d'énergie de photons incidents $< u_i >$.
7. Calculer la pression de radiation exercée par un laser de diamètre $d = 5$ mm et de puissance moyenne $< P >= 100$ W (laser utilisé industriellement pour la découpe de papier).
   Calculer la pression de radiation solaire sachant que l'éclairement, qui est égal à la norme du vecteur de Poynting, vaut : $\mathcal{E} \simeq 1400$ W.m^{-2}.

Ex. 4 : Réflexion d'une OPPM polarisée circulairement sur un métal [*à faire à la maison*]

Une OPPM de pulsation ω, polarisée circulairement droite et se propageant dans le vide dans le sens des z croissants, rencontre un métal parfait en $z = 0$.

1. Ecrire l'expression du champ électrique de l'onde incidente.
2. Déterminer le champ électrique et la polarisation de l'onde réfléchie.
3. Déterminer les champs magnétiques incident et réfléchi.
4. Comparer les champs électrique et magnétique de l'onde résultante.
5. Calculer le vecteur de Poynting et la densité d'énergie em. Commenter.
6. Calculer les densités superficielles de charge et de courant à la surface du conducteur.

Ex. 5 : Onde électromagnétique dans un plasma peu dense : cas de l'ionosphère

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma occupant le demi-espace $z \geq 0$.
Un plasma est un gaz ionisé (constitué d'électrons libres et d'ions positifs) globalement neutre. On considérera un plasma peu dense et on supposera les charges en mouvement non relativistes.

1. Faire le bilan de toutes les forces appliquées à un électron libre et préciser lesquelles sont négligeables et pourquoi. On admettra que, dans un plasma, on a : $\|\vec{B}\| \leq \|\vec{E}\|/c$.
2. Calculer la vitesse de déplacement d'un électron libre dans un champ électrique oscillant de la forme : $\underline{\vec{E}} = E_0\ e^{i\omega t}\ \vec{u}_x$.
3. Expliquer pourquoi on peut négliger le mouvement des ions positifs.

   Montrer que le plasma possède une conductivité complexe que l'on exprimera en fonction de la densité volumique d'électrons libres n.
4. Calculer la puissance volumique moyenne cédée par le champ électromagnétique aux électrons.
5. Etablir l'équation de propagation du champ $\underline{\vec{E}}$ et la relation de dispersion pour une onde plane de la forme :

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = E_0\ \exp[i(\omega t - kz)]\ \vec{u}_x$$

   Montrer que, dans un plasma, on a bien : $\|\vec{B}\| \leq \|\vec{E}\|/c$.
6. En déduire qu'il existe une fréquence de coupure f_p en dessous de laquelle l'onde ne peut se propager. Donner l'expression de f_p.

   Caractériser entièrement l'onde dans les deux cas : $f < f_p$ et $f > f_p$.
7. Calculer, dans le cas où il y a propagation, la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Les représenter sur un graphe en fonction de la fréquence.
8. L'ionosphère, couche de l'atmosphère située à plus de 50 km d'altitude, peut être considérée comme un plasma avec $n \simeq 10^{11}$ m^{-3}.
   (a) Pourquoi l'ionosphère est un plasma ?
   (b) Calculer la fréquence f_p et longueur d'onde plasma λ_p de l'ionosphère.
   (c) Expliquer comment se fait la transmission des ondes radio GO et FM.
   Pourquoi les GO peuvent être captées beaucoup plus loin du lieu d'émission que la FM ?

A.N. : $\epsilon \simeq \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F.m^{-1}, $\mu \simeq \mu_0$; masse de l'électron : $m = 9,1\ \times 10^{-31}$ kg ; $f_{GO} = 167$ kHz (France Inter) et $f_{FM} = 105,5$ MHz (France Info).