Université de Cergy-Pontoise *Électromagnétisme 2*

L3 PC L3 P *18 mars 2017*

Examen

durée 3h, calculatrice est interdite

Question de cours : *Propagation d'une OPPM dans le vide (≈ 4 points) :*

Le champ électrique d'une OPPM dans le vide est présenté en notation complexe par $\vec{E}=E_0\vec{u}_x e^{i(\omega t-kz)}$

1) Expliquer pourquoi cette onde est plane, progressive et monochromatique. Préciser la direction de sa polarisation. Quelle est la direction et le sens de propagation de cette onde ? Justifier.
2) Écrire les équations de Maxwell vérifiées par cette onde. En déduire la structure $(\vec{E},\vec{B},\vec{k})$ de l'onde et exprimer le champ magnétique $\vec{B}$.

Exercice 1 : *Décharge d'un condensateur (≈ 10 points)*

Un condensateur plan possède des armatures circulaires de rayon a situées à une distance e l'une de l'autre. L'armature gauche porte la charge $q_0 > 0$. L'armature droite est relié par un fil électrique sans résistance à un conducteur ohmique cylindrique, de conductivité γ, de rayon b et de longueur L. Le condensateur et le conducteur ohmique constituent un système de symétrie cylindrique de même axe de révolution horizontal (Oz), passant par le fil qui le relie.

A $t = 0$, on relie l'armature gauche du condensateur au coté droit du conducteur par un autre fil sans résistance. Le condensateur commence à se décharger. On s'intéresse à l'opération de décharge de ce condensateur et on désigne par $q(t) > 0$ la charge portée par l'armature gauche à l'instant t.

On suppose que la décharge du condensateur s'effectue lentement dans le temps pour que l'on puisse supposer que le champ électrique est uniforme entre les armatures. On suppose également que $a >> e$, de sorte que l'on peut négliger les effets de bord.

Flux d'énergie électromagnétique du condensateur.

1) Rappeler le théorème de Gauss. Calculer le champ électrique d'un plan infini chargé d'une densité surfacique $\sigma(t)$. L'appliquer au calcul du champ électrique créé par deux plans infini de charges opposées.
2) En déduire le champ électrique entre les armatures du condensateur plan, $\vec{E}_1$, en fonction de sa charge $q(t)$ et de ses paramètres géométriques. Calculer la tension du condensateur, $\Delta\varphi$.
3) Trouver le champ magnétique dans le condensateur, $\vec{B}_1$, à partir de la symétrie du problème et la loi d'Ampère.
4) Préciser les vecteurs des champs électrique et magnétique sur la surface ouverte S_1, désignée par la surface du cylindre de rayon a s'appuyant sur le bord des armatures. Calculer le vecteur de Poynting sur S_1 ($\vec{\pi}_{S1}$). De quelle manière l'énergie électromagnétique sort elle du condensateur ? Indiquer $\vec{E}_1$, $\vec{B}_1$, $\vec{\pi}_{S1}$ le sur un dessin.
5) Calculer le flux de $\vec{\pi}_{S1}$ travers S_1, (Φ_1). L'exprimer en fonction de $\Delta\varphi$.

Flux d'énergie électromagnétique du conducteur ohmique.

6) Au cours de la décharge, un courant uniforme $I(t)$ passe dans le corps du conducteur ohmique cylindrique. Calculer la densité de courant correspondante. En déduire le champ électrique dans le conducteur ohmique, $\vec{E}_2$.
7) Calculer le champ magnétique à l'intérieur du conducteur, $\vec{B}_2$. On supposera que $L >> b$, de sorte que l'on peut négliger les effets de bord.
8) Calculer le vecteur de Poynting à la surface (S_2) du conducteur ($\vec{\pi}_{S2}$). Indiquer $\vec{E}_2$, $\vec{B}_2$ et $\vec{\pi}_{S2}$ sur un dessin.
9) Calculer de flux de $\vec{\pi}_{S2}$ à travers les parois du conducteur cylindrique (Φ_2).
10) Le comparer à Φ_1, en tenant compte de l'égalité des tensions aux bornes du condensateur et du conducteur ($\Delta\varphi$).

Exercice 2 : *Dispersion dans le plasma interstellaire* (≈ 11 points)

Le plasma interstellaire est un milieu globalement neutre, constitué d'ions supposés fixes et d'électrons libres (masse *m*, charge électronique *-e*, densité volumique, i.e. nombre par unité de volume, *n*).

Une onde plane progressive monochromatique, de vecteur d'onde $\vec{k}$ et de pulsation ω, se propage dans ce milieu dans la direction *Oz*. En représentation complexe, son champ électrique et magnétique s'écrivent :

$$\tilde{\vec{E}}(z,t)=\vec{E}_0 e^{i(kz-\omega t)} \qquad \tilde{\vec{B}}(z,t)=\vec{B}_0 e^{i(kz-\omega t)} \tag{2}$$

Le signe tilde (~) indique une grandeur complexe. $\vec{E}_0$ et $\vec{B}_0$ sont réels.

1) Montrer, à partir l'équation de Maxwell-Ampère, que de telles solutions supposent que la densité de courant $\vec{j}$ soit elle même une onde plane monochromatique du type :
$$\tilde{\vec{j}}(z,t)=\tilde{\vec{j}}_0 e^{i(kz-\omega t)} \tag{3}$$
Exprimer $\tilde{\vec{j}}_0$, qui est une grandeur complexe, en fonction de ω, $\vec{k}$, $\vec{E}_0$ et $\vec{B}_0$.
2) Écrire les équations de Maxwell sachant que le milieu reste localement neutre même au passage d'ondes électromagnétiques. En déduire que $\vec{j}$ est orthogonal à $\vec{k}$.
3) Exprimer le champ magnétique $\vec{B}$ en fonction du champ électrique $\vec{E}$, $\vec{k}$ et ω. Quelle est la structure de cette onde ?
4) Montrer que les vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont colinéaires et déterminer la conductivité γ du plasma définie par $\vec{j}=\gamma\vec{E}$. Montrer que γ est imaginaire pur.
5) Écrire l'équation du mouvement de l'électron. Seule la force de Lorentz est à considérer. Le poids et les interactions électron-électron et électron-ion sont à négliger. Montrer que l'effet du champ magnétique est également négligeable.
6) Les seules charges supposées mobiles sont les électrons. Calculer la vitesse d'un électron, $\vec{v}$. Exprimer $\vec{j}$ en fonction de $\vec{v}$. En déduire une nouvelle relation entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$ puis une nouvelle expression de γ.
7) Quel est le déphasage entre $\vec{E}$ et $\vec{j}$? Calculer la valeur moyenne de $\vec{j}.\vec{E}$. En déduire si la propagation de l'onde se fait avec atténuation.
8) En considérant l'onde plane de l'équation (2), montrer que la relation de dispersion associée au plasma prend la forme suivante :
$$k^2=\frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2} \tag{4}$$
où *c* est la vitesse de la lumière dans le vide. Déterminer la constante ω_p, appelée la pulsation de plasma.
9) Dans le cas $\omega > \omega_p$, calculer la vitesse de phase $v_\varphi=\frac{\omega}{k}$ et la vitesse de groupe $v_g=\frac{d\omega}{dk}$ des ondes électromagnétiques dans le plasma. Représenter leur variation en fonction de la pulsation ω sur le même graphe. Quelle relation vérifient-elles ?
10) *Application*. Deux trains d'ondes de longueurs d'onde respectives λ_1 et $\lambda_2<\lambda_1$ sont émis au même instant par un objet stellaire situé à une distance *L*. On définit $K^2=\omega_p^2/c^2$. On prendra $K^2\lambda_1^2\ll 1$ et $K^2\lambda_2^2\ll 1$. Montrer que le terme principal dans la différence $\delta t=t_2-t_1$ des temps de réception des deux signaux est donné par $\delta t=\frac{LK^2}{8\pi^2 c}(\lambda_2^2-\lambda_1^2)$.
11) **A.N.** Des mesures de dispersion à partir de signaux émis par le pulsar du Crabe conduisent à une limite supérieure de la densité volumique des électrons du plasma interstellaire égale à $n = 2{,}8\ 10^4\ \mathrm{m^{-3}}$. Quelle serait dans ces conditions la limite supérieure δt pour les longueurs d'onde $\lambda_1 = 0{,}4\ \mu\mathrm{m}$ et $\lambda_2 = 0{,}8\ \mu\mathrm{m}$ de signaux émis par une étoile située à $L = 10^3$ années-lumière ?