Université de Cergy-Pontoise
L3 Physique
2016-2017

Vendredi 21 avril 2017

Electromagnétisme 3 - Examen

Documents, livres, calculatrices interdits. Durée 3 heures.

Exercice 1

On étudie une molécule de l'atmosphère soumise au rayonnement solaire. Le barycentre O des charges positives définit l'origine d'un référentiel galiléen d'axes $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le barycentre A des charges négatives (charge totale $-q$, masse totale m) est repéré par $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$. L'évolution de la molécule se réduit à l'étude du mouvement du point matériel A de charge $-q$ et de masse m, soumis, de la part du reste de la molécule, à une force élastique de rappel $\vec{F}_r = -m\,\omega_o^2\,\vec{r}$ et à une force de frottement visqueux $\vec{F}_v = -\alpha\, d\vec{r}/dt$ où α et ω_o sont des constantes positives. Le rayonnement est assimilé à une onde électromagnétique plane de longueur d'onde λ dont le champ électrique $\vec{E}_o(t) = E_m \cos(\omega t)\,\vec{e}_z$ est uniforme à l'échelle de la molécule (E_m et $\omega = 2\pi c/\lambda$ sont des constantes, c est la vitesse de la lumière dans le vide).

1) Pourquoi le mouvement des charges positives est-il négligeable ? A quelle condition sur λ le champ $\vec{E}_o(t)$ est-il uniforme ? Pourquoi peut-on négliger la force magnétique ?

2) Etablir l'équation du mouvement de A. La molécule atteint un régime permanent caractérisé (en notation complexe) par $\vec{r}(t) = z_o\, e^{i\,\omega\, t}\,\vec{e}_z$ et un moment dipolaire $\vec{p}(t) = p_o\, e^{i\,\omega\, t}\,\vec{e}_z$. En déduire l'amplitude complexe p_o en fonction de m, q, ω_o, ω, E_m et $\tau_e = m/\alpha$.

3) On démontre qu'un dipôle oscillant d'amplitude complexe p_o rayonne un champ électromagnétique donné, en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), par :

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o c^2}\,|p_o|\,\omega^2\,\frac{\sin\theta}{r}\cos\left(\omega(t - r/c)\right)\vec{e}_\theta$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_o}{4\pi c}\,|p_o|\,\omega^2\,\frac{\sin\theta}{r}\cos\left(\omega(t - r/c)\right)\vec{e}_\phi$$

où $|p_o|$ est le module de p_o

a) Rappeler brièvement les différentes approximations utilisées pour obtenir les expressions des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ci-dessus.

b) Calculer, en fonction de ω, $|p_o|$, ϵ_o et c, la puissance moyenne totale rayonnée par le dipôle oscillant à travers une sphère de rayon R_o centrée sur le dipôle.

4) On se place dans le domaine visible où $\omega \ll \omega_o$ et on suppose que $\omega_o\,\tau_e \gg 1$. En déduire la puissance moyenne totale diffusée par une molécule de l'atmosphère en fonction de ω, q, m E_m, ω_o, ϵ_o et c. Expliquer pourquoi le Soleil prend une teinte rougeâtre sur l'horizon.

Exercice 2 : Susceptibilté d'un diélectrique

On étudie un modèle microscopique de milieu diélectrique parfait *lhi*, localement neutre. Il est constitué d'atomes d'hydrogène dont le noyau est supposé fixe et dont l'électron est soumis à une force de rappel $\vec{f} = -m\omega_0^2\,\vec{r}$, où $\vec{r}$ est le vecteur position de l'électron par rapport au centre de masse du noyau auquel il est lié et ω_0 une constante positive. On note N le nombre d'atomes par unité de volume et m la masse de l'électron. On étudie la propagation d'une OPPM dont le champ électrique est uniforme à l'échelle de l'atome et s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp\left[i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\right]$$

1. Ecrire l'équation régissant le mouvement d'un électron. La simplifier compte-tenu du fait que l'électron n'est pas relativiste. La résoudre en régime permanent.
2. En déduire le vecteur polarisation et la susceptibilité électrique $\underline{\chi}_e(\omega)$ de ce milieu. On posera $\omega_P^2 = \dfrac{Ne^2}{m\epsilon_0}$.
3. En déduire la relation de dispersion. Tracer qualitativement la courbe $k^2 = f(\omega^2)$. Dans quel domaine de pulsation l'onde peut-elle se propager dans ce milieu ? Justifier.

Exercice 3 : Réflexion totale

Un milieu diélectrique *lhi* parfait transparent d'indice $n > 1$ occupe le demi-espace $y < 0$ tandis que l'air occupe le demi-espace $y > 0$. Une onde plane, monochromatique de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}_i$ se propageant dans le milieu d'indice n arrive sur l'interface $y = 0$ avec un angle d'incidence i.

On notera $\alpha = \dfrac{n\omega}{c}\cos i$ et $\beta = \dfrac{n\omega}{c}\sin i$.

1. Rappeler les lois de Descartes. Quelle est la condition sur i pour avoir réflexion totale ? On supposera cette condition vérifiée dans toute la suite de l'exercice.
2. Le champ électrique de l'onde incidente s'écrit en notation complexe :

   $$\underline{\vec{E}}_i = E_0 \exp\left[i(\omega t - \vec{k}_i\cdot\vec{r})\right]\vec{u}_x$$

   où E_0 est une constante réelle.
   Exprimer le vecteur d'onde $\vec{k}_i$ et le champ magnétique $\underline{\vec{B}}_i$ de l'onde incidente en fonction des données.
3. On admettra que le champ électrique de l'onde réfléchie s'écrit en notation complexe :

   $$\underline{\vec{E}}_r = \underline{E}_{0r} \exp\left[i(\omega t - \vec{k}_r\cdot\vec{r})\right]\vec{u}_x$$

   Exprimer le vecteur d'onde $\vec{k}_r$ et le champ magnétique $\underline{\vec{B}}_r$ de l'onde réfléchie en fonction des données.
4. Montrer que les relations de passage à l'interface milieu/air ne peuvent être satisfaites en l'absence d'onde transmise.
5. On admettra que le champ électrique de l'onde transmise s'écrit en notation complexe :

   $$\underline{\vec{E}}_t = \underline{E}_{0t} \exp\left[-k_2 y + i(\omega t - k_1 z)\right]\vec{u}_x$$

   où k_1 et k_2 sont des réels positifs.
   Commenter la structure de l'onde transmise.
   Exprimer le vecteur d'onde complexe $\underline{\vec{k}}_t$ et le champ magnétique $\underline{\vec{B}}_t$ de l'onde transmise en fonction des données.
6. Ecrire les relations de passage. En déduire les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude, $\underline{r} = \underline{E}_{0r}/E_0$ et $\underline{t} = \underline{E}_{0t}/E_0$.
7. Calculer le coefficient de réflexion en énergie en utilisant la formule suivante pour le calcul de la moyenne du vecteur de Poynting :

   $$<\vec{\Pi}> = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^*}{\mu_0}\right)$$

   En déduire le coefficient de transmission en énergie. Conclure.