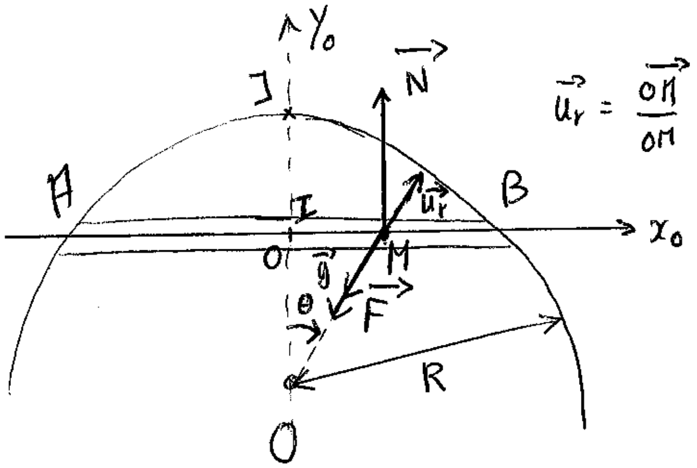
Ex : Tunnel foré à travers le globe terrestre

(L2 - DEUG 2004 Mécanique I. Ex 2)



force de gravitation : $\vec{F} = m\vec{g}$

avec $\vec{g}(M)$ l'accélération de la pesanteur due à la terre

$\vec{g}$ est un champ de vecteur similaire à $\vec{E}$ (champs électrostatique)

Électrostatique	Pesanteur
$\vec{E}(M) = \iiint_P \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{dq\,\vec{PM}}{PM^3}$	$\vec{g}(M) = -\iiint_P \mathcal{G} \dfrac{dm\,\vec{PM}}{PM^3}$
dq ⟷	dm
$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ ⟷	$-\mathcal{G}$
$\propto \dfrac{1}{r^2}$	$\propto \dfrac{1}{r^2}$

2.1.

on peut donc appliquer le th. de Gauss pour le calcul de $\vec{g}(M)$

$$\oiint_S \vec{g}\cdot d\vec{S} = -M_{intérieur}\,\mathcal{G}\,4\pi \quad \longleftrightarrow \quad \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\vec{g}$ est radial $\vec{g}(M) = -g(M)\,\vec{u_r}$ par symétrie sphérique (ρ : uniforme)

masse volumique

S : sphère de rayon $r = OM$ et de centre O.

$$\oiint \vec{g}\cdot d\vec{S} = -4\pi r^2 g(r) = -M_{int}\,\mathcal{G}\,4\pi = -\mathcal{G}\,4\pi\,\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

soit $g(r) = r\,\mathcal{G}\,4\pi\rho$

pour $r = R$: $g(R) = g_0$ donc $\mathcal{G}\,4\pi\rho = \dfrac{1}{R}\,g_0$ soit $\boxed{\vec{g}(M) = -\dfrac{r}{R}\,g_0\,\vec{u_r}}$

2.2. th de la résultante dynamique $m\vec{a}(M) = m\vec{g}(M) + \vec{N}$

$\vec{N}$ force du support sur le train (sans frottement) $\vec{N} = N\,\vec{u_y}$

2

2.3. projection sur (Ix_0) avec $x=0$ au milieu de $[AB]$: I

$$m\ddot{x} = -m\,g(r)\sin\theta \quad \text{avec} \quad \theta = (Oy_0, Ox_0)$$

et $x = IM$

$$m\ddot{x} = -\frac{m}{R}\,g_0\,\underbrace{r\sin\theta}_{=x}$$

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{g_0}{R}\,x}$$ Eq. du mouvement de M

2.4. Soit $\omega = \sqrt{\frac{g_0}{R}}$: $x(t) = \alpha\cos(\omega t+\varphi) = \frac{d}{2}\cos(\omega t+\varphi)$ (constantes)

l'amplitude α est donnée par $2\alpha = AB = d$

la période T du mouvement est $T = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{\underline{2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}}}$

$$t_{AB} = \frac{T}{2} = \underline{\underline{\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}}}$$

2.5. Vitesse maximale :

vitesse $\dot{x}(t) = -\frac{d}{2}\,\omega\sin(\omega t+\varphi)$

la vitesse maximale est donc : $\frac{d}{2}\omega = \underline{\underline{\frac{d}{2}\sqrt{\frac{g_0}{R}} = V_{max}}}$

2.6. $d = 400$ km

profondeur : $p = IJ = R - OI = R - \sqrt{R^2 - d^2/4} = 6400 - \sqrt{6400^2 - 200^2} = \underline{\underline{3{,}126 \text{ km}}}$

or $IB^2 + IO^2 = R^2$ et $IB = \frac{d}{2}$

$$t_{AB} = \pi\sqrt{\frac{6400\cdot 10^3}{9{,}81}} = 2537 \text{ s} = 58{,}95 \text{ mn} = \underline{\underline{58 \text{ m } 57 \text{ s}}}$$

$$V_{max} = 200\sqrt{\frac{9{,}81}{6400\cdot 10^3}} = 0{,}2476 \text{ km s}^{-1} = \underline{\underline{891{,}4 \text{ km/h}}}$$