Partie B

Thermodynamique

L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct (*Ox*, *Oy*, *Oz*) de base $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$.

L'atmosphère, de masse volumique ρ, est en équilibre thermodynamique à l'altitude *z*, dans le champ de pesanteur uniforme et constant $\vec{g} = -g\,\overrightarrow{e_z}$.

L'équation fondamentale (**1**) de la statique des fluides est applicable en tout point M de l'espace :

$$\overrightarrow{grad}\,P(M) = \rho(M)\,\vec{g} \qquad (\mathbf{1})$$

L'atmosphère (mélange gazeux) est assimilée à un gaz parfait unique, de masse molaire moyenne $\overline{M}$. Soient T_o et P_o, les température et pression au niveau du sol $(z=0)$.

On pose $H = \dfrac{R\,T_o}{\overline{M}\,g}$.

I. Généralités

1) Montrer que l'équation fondamentale (**1**) se traduit par une équation différentielle locale qui relie les grandeurs $P(z)$, $\rho(z)$, g et z.

2) Rappeler l'équation d'état du gaz parfait.

3) Exprimer la masse volumique $\rho(z)$ de l'air, en fonction de $P(z)$, $T(z)$, $\overline{M}$ et R.

II. Premier modèle

Un premier modèle simple consiste à considérer que la température de l'atmosphère est une grandeur uniforme et constante : $T(z) = T_o$ (modèle de l'atmosphère isotherme).

1) Établir l'expression littérale de la pression $P(z)$.

2) La variation relative de pression, de $z=0$ à z, s'exprime par : $\dfrac{\Delta P}{P_o} = \dfrac{P(z)-P_o}{P_o}$. Jusqu'à l'altitude z_1, pour laquelle la pression peut être considérée comme uniforme, la variation relative $\left|\dfrac{\Delta P}{P_o}\right|$ n'excède pas 10^{-2}. Exprimer z_1 en fonction de *H*.

3) *Application numérique.*
$R = 8{,}3\ \mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$; $T_o = 290\,\mathrm{K}$; $\overline{M} = 29\times10^{-3}\ \mathrm{kg\ mol^{-1}}$; $g = 9{,}8\,\mathrm{m\ s^{-2}}$.
Calculer *H* et z_1.

III. Second modèle

Un deuxième modèle établit que l'atmosphère présente un gradient thermique λ constant. La température $T(z)$ est une fonction affine de l'altitude *z*, selon la loi : $T(z) = T_o + \lambda z$. Établir l'expression littérale de la pression $P(z)$.