

Partie A : câble coaxial en régime continu

Un câble est constitué de deux armatures métalliques coaxiales (axe Ox commun), séparées par un matériau isolant imparfait (figure 1) :

- l'armature interne (A_1), ou âme, est un conducteur cylindrique (plein), de conductivité σ et de rayon r_1 ;
- l'armature externe (A_2) est une enveloppe cylindrique pleine, conductrice, de conductivité σ et comprise entre deux surfaces cylindriques coaxiales, de rayons r_2 et r_3 (avec $r_2 < r_3$) ;
- la gaine d'isolant imparfait (G), de conductivité σ_g , compris entre les surfaces cylindriques de rayons r_1 et r_2 , sépare l'âme de l'armature externe.

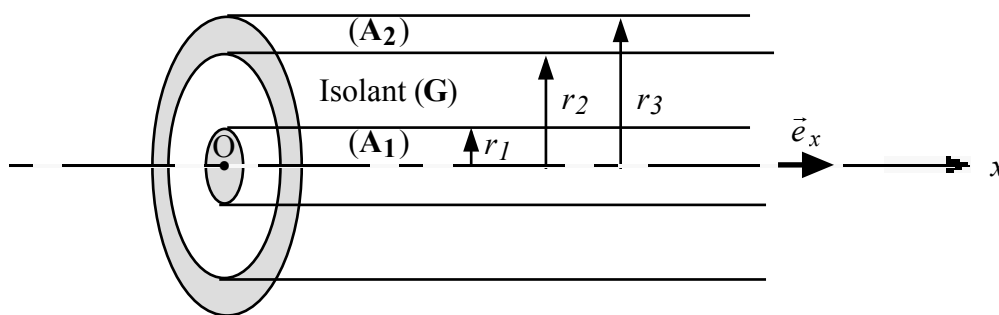


Figure 1

I. Loi d'Ohm locale

Les charges mobiles (électrons de charge $-e$) d'un conducteur métallique cylindrique, d'axe Ox orienté par le vecteur unitaire \vec{e}_x , sont animées d'une vitesse \vec{v} , sous l'action d'un champ électrique uniforme $\vec{E} = E \vec{e}_x$ appliqué à l'instant initial $t = 0$ (avec $\vec{v}(t = 0) = \vec{0}$). Les électrons sont en outre soumis à une force de freinage $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$, avec τ constante physique positive et m la masse de l'électron. L'action du champ de pesanteur est négligée.

- 1) Quelles peuvent être les causes de l'existence de la force de freinage ?
- 2) La vitesse \vec{v} est colinéaire au vecteur \vec{e}_x . En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, exprimer l'équation différentielle qui relie le vecteur \vec{v} au temps t .
- 3) En déduire l'expression vectorielle du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$.
- 4) Montrer que la vitesse $\vec{v}(t)$ de l'électron tend vers une valeur limite \vec{v}_{lim} qui dépend des grandeurs e , m , τ et \vec{E} .

5) *Application numérique.*

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} ; m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg} ; \tau = 2,5 \times 10^{-14} \text{ s} ; E = 0,5 \text{ V m}^{-1}.$$

5.1. Calculer v_{lim} .

5.2. Comparer $v(t = 5\tau)$ et v_{lim} . Conclure sur la durée d'établissement du régime permanent.

6) Le régime permanent est maintenant établi : l'égalité $\vec{v} = \vec{v}_{\text{lim}} = \mu \vec{E}$ est vérifiée (avec μ mobilité algébrique constante des électrons). \vec{j} est le vecteur densité de courant électrique, et N^* est la densité particulaire des électrons (nombre d'électrons par unité de volume) dans le métal.

6.1. En rappelant la relation qui existe entre \vec{j} , N^* , e et \vec{v} , montrer que le conducteur métallique satisfait à la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, avec σ conductivité électrique du milieu.

6.2. *Application numérique.* $N^* = 6,0 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

Calculer la valeur de la conductivité σ .

II. Résistance d'un conducteur cylindrique d'axe Ox

Un conducteur cylindrique d'axe Ox , de section constante S , est parcouru par un courant d'intensité I constante, et obéit à la loi d'Ohm locale. Le régime est permanent : les vecteurs \vec{j} et \vec{E} sont uniformes, et le phénomène de transport est unidirectionnel.

La section (disque) d'abscisse $x = 0$ est maintenue au potentiel V_0 constant. Soit $V(x)$, le potentiel de la section d'abscisse x (figure 2).

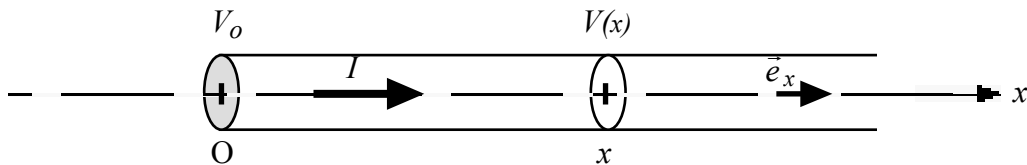


Figure 2

- 1) Rappeler la relation entre I et \vec{j} .
- 2) Le champ électrique dérive du potentiel V (relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$) : écrire l'équation qui lie le vecteur densité de courant \vec{j} à la dérivée $\frac{dV(x)}{dx}$.
- 3) Exprimer, en fonction des grandeurs V_0 , I , σ , S et x , le potentiel $V(x)$ du conducteur, dans le plan d'abscisse x .
- 4) En déduire la résistance $R(x)$ du conducteur cylindrique compris entre les sections d'abscisses $x = 0$ et x .
- 5) Les propriétés et résultats précédents sont applicables aux armatures (A_1) et (A_2) du câble coaxial.
 - 5.1. Exprimer, en fonction de σ et r_1 , la résistance linéique λ_1 du conducteur (A_1) (résistance par unité de longueur).
 - 5.2. Déterminer, en fonction de σ , r_2 et r_3 , la résistance linéique λ_2 du conducteur (A_2).

III. Résistance de la gaine d'isolant imparfait comprise entre les deux armatures

Les armatures (A_1) et (A_2) sont considérées, **uniquement dans ce paragraphe (§. A.III)**, comme des conducteurs parfaits portés aux potentiels respectifs V_1 et V_2 (avec $V_1 > V_2$) uniformes et constants.

La gaine « d'isolant » homogène (G), comprise entre les armatures, se comporte comme un conducteur ohmique de faible conductivité σ_g . Il est parcouru par un courant électrique de fuite I_f . Le phénomène est à symétrie cylindrique et les effets de bord sont négligés : les lignes de courant dans « l'isolant » sont radiales (donc orthogonales à l'axe Ox) sur toute la longueur ℓ du câble et le vecteur densité de courant ne dépend que du rayon r (figure 3).

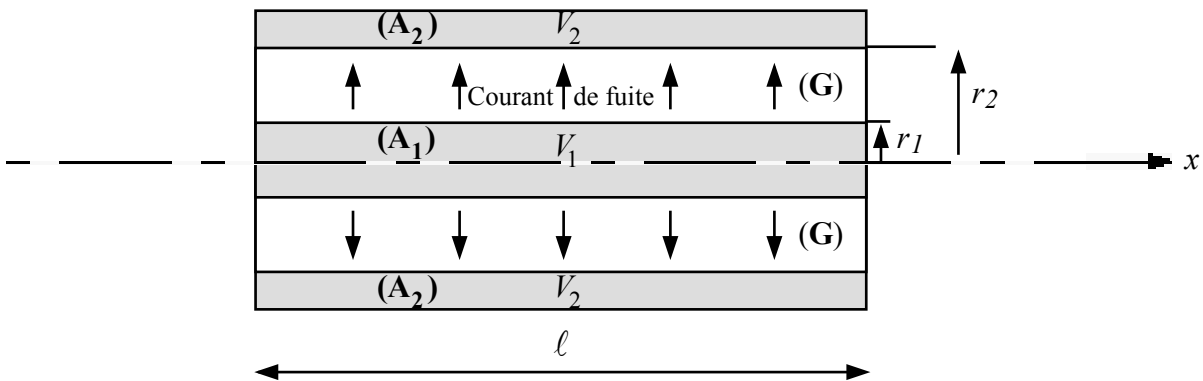


Figure 3

- 1) Le phénomène de transport étant unidimensionnel, écrire l'équation qui lie la densité de courant $j(r)$ à la dérivée $\frac{dV(r)}{dr}$.
- 2) En choisissant une surface cylindrique d'axe Ox , de longueur ℓ et de rayon r ($r_1 < r < r_2$), relier l'intensité I_f du courant de fuite à la densité de courant $j(r)$.
- 3) Sachant que la différence de potentiel $V_1 - V_2$ s'écrit sous la forme $V_1 - V_2 = RI_f$, déterminer, en fonction des grandeurs σ_g , ℓ , r_1 et r_2 , la résistance R de la gaine d'isolant, de longueur ℓ .

IV. Étude du câble coaxial

Les armatures ont à nouveau la conductivité σ , comme décrit au § A.II.5.

Dans le plan d'abscisse $x=0$, la section de l'armature interne (A_1) (disque de rayon r_1) est maintenue au potentiel $V_1(0) = V_1$ constant et la section de l'armature externe (A_2) (couronne circulaire) est maintenue au potentiel $V_2(0) = V_2$ constant, avec $V_1 > V_2$.

Dans le plan d'abscisse x , la section de l'armature (A_1) se trouve au potentiel $V_1(x)$, et la section de l'armature (A_2) présente le potentiel $V_2(x)$. Par ailleurs, toujours dans le plan d'abscisse x , ces sections sont traversées par des courants (lignes de courants parallèles à Ox), de même intensité $i(x)$, mais de sens opposés.

Soit $i(0) = i_0$, l'intensité constante du courant dans (A_1) et (A_2), à l'abscisse $x = 0$.

La tranche élémentaire de câble coaxial, comprise entre les plans d'abscisse x et $x+dx$, est partiellement symbolisée par la figure 4.

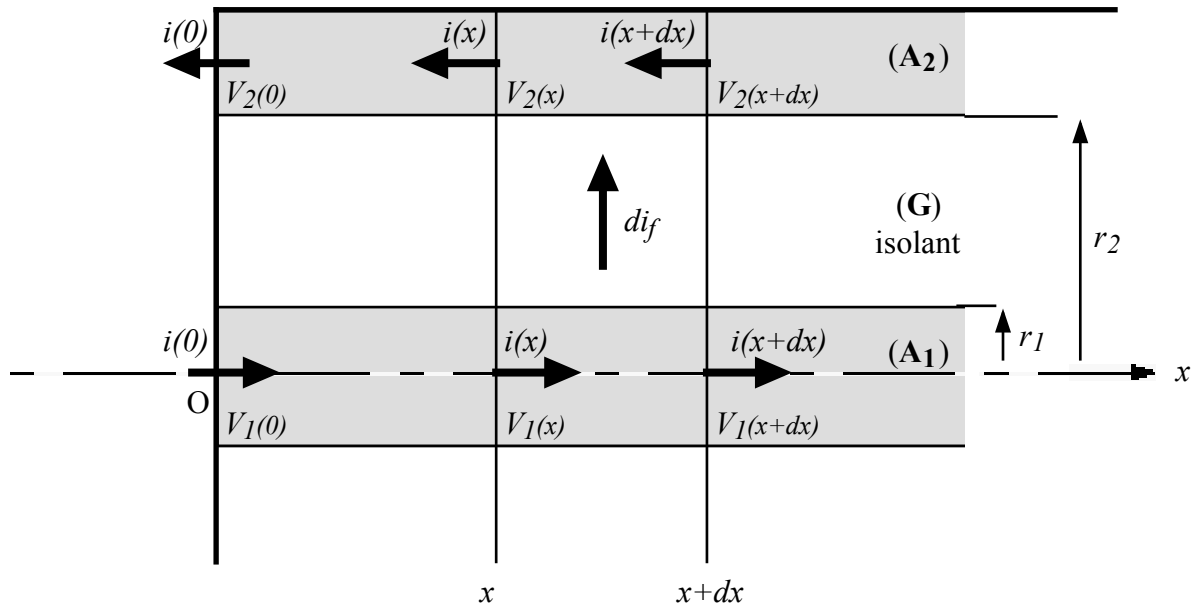


Figure 4

- 1) Exprimer, en fonction de $i(x)$ et $i(x+dx)$, le courant de fuite élémentaire di_f , dans la tranche d'épaisseur dx (figure 4).
- 2) Par application de la loi d'Ohm, dans la tranche élémentaire d'épaisseur dx , établir :
 - 2.1. une équation différentielle liant $V_1(x)$ et $i(x)$, pour l'armature (A1) de résistance linéique λ_1 ;
 - 2.2. une équation différentielle liant $V_2(x)$ et $i(x)$, pour l'armature (A2) de résistance linéique λ_2 ;
 - 2.3. une équation différentielle liant $V_1(x)$, $V_2(x)$ et $i(x)$, pour « l'isolant » (G).
- 3) On pose $\lambda_g = \frac{1}{2\pi\sigma_g} \ln \frac{r_2}{r_1}$. Montrer qu'en combinant les trois équations différentielles précédentes, on obtient une équation différentielle du second ordre en $i(x)$, de la forme :

$$\frac{d^2 i(x)}{dx^2} - \omega^2 i(x) = 0.$$

Exprimer ω en fonction de λ_1 , λ_2 et λ_g .

- 4) Le câble est supposé de longueur infinie. L'intégration de l'équation différentielle précédente conduit à l'expression :

$$i(x) = I_1 e^{-\omega x} + I_2 e^{+\omega x}, \text{ avec } I_1 \text{ et } I_2 \text{ constantes d'intégration.}$$

- 4.1. Déterminer les constantes I_1 et I_2 .
- 4.2. Dessiner l'allure de la courbe représentative de la fonction $i(x)$.

5) La résistance de ce câble coaxial, de longueur infinie, est définie par le rapport

$$R_c = \frac{V_1(0) - V_2(0)}{i(0)} .$$

5.1. Établir les expressions de $V_1(x)$ et $V_2(x)$.

5.2. Dessiner l'allure de la courbe représentative de la fonction $v(x) = [V_1(x) - V_2(x)]$.

5.3. Déterminer, en fonction des grandeurs λ_1, λ_2 et λ_g , la résistance R_c .

V. Modélisation simple du câble

Le câble peut être modélisé par un circuit A_1A_2 , constitué d'une chaîne de n modules identiques comportant chacun trois résistors (résistances respectives $R/2$, $2R$ et $R/2$) (figures 5 et 6).

Un dipôle résistor X_1X_2 , de résistance $2R$, est branché en parallèle à l'extrémité de la chaîne.

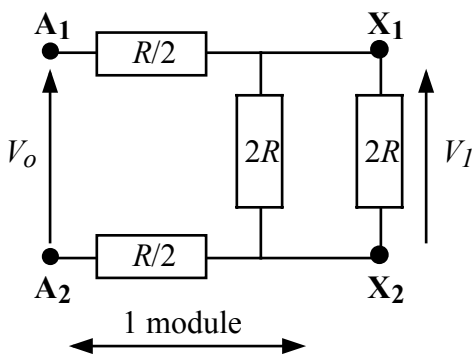


Figure 5

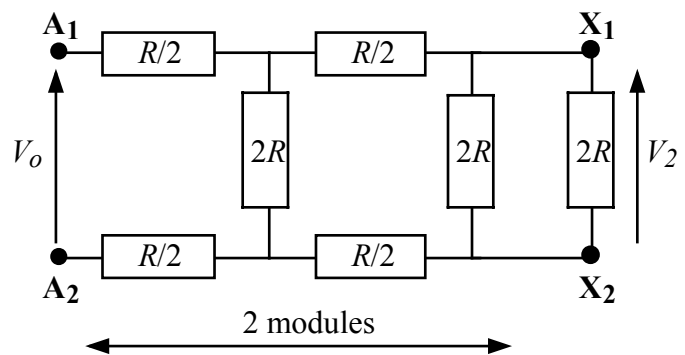


Figure 6

1) Le dipôle A_1A_2 est équivalent à un résistor.

1.1. Exprimer, en fonction de R , la résistance équivalente R_1 , dans le cas d'une chaîne ne comportant qu'un seul module (figure 5).

1.2. Même question pour la résistance équivalente R_2 , dans le cas d'une chaîne à $n = 2$ modules (figure 6).

1.3. En déduire, sur le même principe, la résistance équivalente R_n d'une chaîne à n modules.

2) Le dipôle A_1A_2 est alimenté par un générateur de tension constante $V_o = V_{A1} - V_{A2}$.

2.1. Déterminer, en fonction de V_o et R , la tension $V_1 = V_{X1} - V_{X2}$, aux bornes du résistor X_1X_2 , dans le cas d'une chaîne ne comportant qu'un seul module (figure 5).

2.2. Même question pour la tension V_2 , dans le cas d'une chaîne à $n = 2$ modules (figure 6).

2.3. En déduire, sur le même principe, la tension V_n dans le cas d'une chaîne à n modules.

2.4. En déduire la valeur V_∞ pour une chaîne de longueur infinie ($n \rightarrow \infty$) .