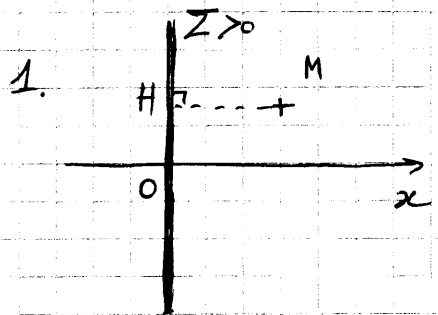


Cornise de la partie A de l'épreuve Phys II - 2012

Charges à la surface d'un métal

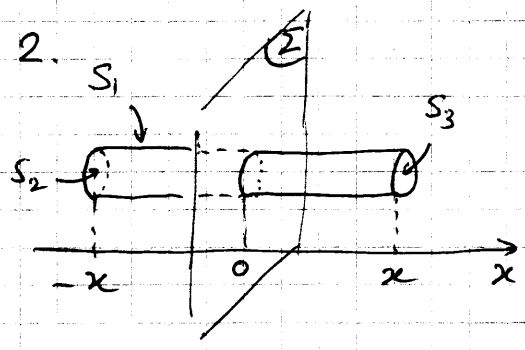
I Plan infini chargé dans le vide



• tous les plans contenant (HM) sont des plans de symétrie de la distribution de charges passant par M $\Rightarrow \vec{E}_Z(M) = E_Z(x, y, z) \vec{e}_x$

• la dist. de charges est invariante par translation parallèlement au plan (Oyz) $\Rightarrow E_Z(x, y, z) = E_Z(x)$

$\Rightarrow \vec{E}_Z(M) = E_Z(x) \vec{e}_x$



Appliquons le th. de Gauss sur le cylindre S_1 d'axe parallèle à (Ox) et de section S fermée par 2 disques S_2 et S_3 situés à x et $-x$ avec $x > 0$

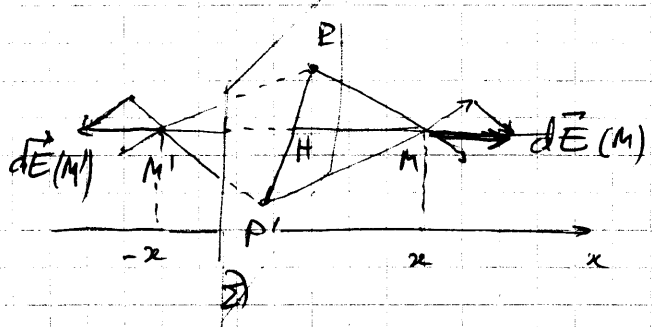
$$\oint \vec{E}_Z \cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint_{S_1} \vec{E}_Z \cdot d\vec{S}}_{=0 \text{ car } \vec{E}_Z \perp d\vec{S}} + \iint_{S_2} \vec{E}_Z \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{E}_Z \cdot d\vec{S}$$

$$= \iint_{S_2} E_Z(-x) \vec{e}_x \cdot (-dS \vec{e}_x) + \iint_{S_3} E_Z(x) \vec{e}_x \cdot dS \vec{e}_x$$

$$= -E_Z(-x) S + E_Z(x) S$$

de + : plan (Oyz) = plan de sym. de la dist. de charges $\Rightarrow \vec{E}_Z(x) = -\vec{E}_Z(-x)$
 $\vec{E}_Z(M) \perp$ à ce plan

[on peut retrouver le résultat en prenant 2 pts P, P' du plan chargé sym. par rapport à H :



$$d\vec{E}(M) = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}_M + \vec{P}'_M}{\|\vec{P}_M\|^3}$$

or $\vec{P}_M + \vec{P}'_M = \vec{P}_H + \vec{H}_M + \vec{P}'_H + \vec{H}_M = 2\vec{H}_M$

$$\rightarrow d\vec{E}(M) = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{H}_M}{\|\vec{P}_M\|^3} \rightarrow d\vec{E}(M) = d\vec{E}(M')$$

et de m : $d\vec{E}(M') = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{H}'_M}{\|\vec{P}'_M\|^3}$

$$\Rightarrow \vec{E}(M') = -\vec{E}(M)$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E}_\Sigma \cdot d\vec{S} = 2 E_\Sigma(x) S$$

or $Q_{int} = \Sigma S$

$$E_\Sigma(x) = \begin{cases} \frac{\Sigma}{2\epsilon_0} & \text{pour } x > 0 \\ -\frac{\Sigma}{2\epsilon_0} & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

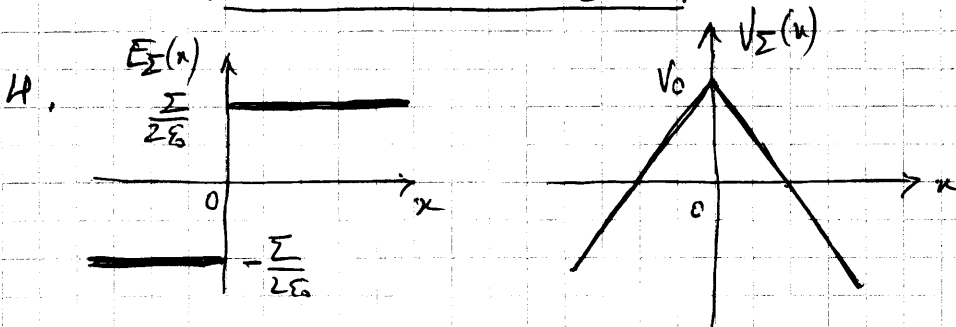
$$3. \vec{E}_\Sigma(M) = -\text{grad } V_\Sigma(M) \Leftrightarrow dV_\Sigma = -\vec{E}_\Sigma(M) \cdot d\vec{OM} = -E_\Sigma(x) dx$$

donc pour $x \geq 0$: $dV_\Sigma = -\frac{\Sigma}{2\epsilon_0} dx \Rightarrow V_\Sigma(x) = -\frac{\Sigma}{2\epsilon_0} x + C_1$

$x < 0$: $dV_\Sigma = +\frac{\Sigma}{2\epsilon_0} dx \Rightarrow V_\Sigma(x) = \frac{\Sigma}{2\epsilon_0} x + C_2$

en choisissant $V_\Sigma(x=0) = V_0 > 0$, on obtient $C_1 = C_2 = V_0$

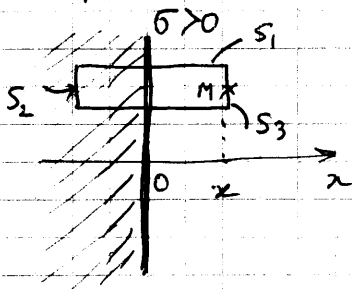
soit
$$V_\Sigma(x) = \begin{cases} V_0 - \frac{\Sigma}{2\epsilon_0} x & \text{pour } x \geq 0 \\ V_0 + \frac{\Sigma}{2\epsilon_0} x & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$$



$E_\Sigma(x)$ bien continu partout sauf à la traversée du plan chargé où il y a une discontinuité finie bien égale à $\frac{\Sigma}{\epsilon_0}$.

$V_\Sigma(x)$ bien continu partout avec $V_\Sigma(0) = V_0 > 0$.

II Surface métallique chargée



1. $\vec{E}_\sigma(M) = E_\sigma(x) \vec{e}_x$ pour $x > 0$ (m démontre qu'au I.1)

2. Appliquons le th. de Gauss sur la même surface qu'au I.2 avec $x > 0$:

$$\oint \vec{E}_\sigma \cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint_{S_1} \vec{E}_\sigma \cdot d\vec{S}}_{=0 \text{ car } \vec{E}_\sigma \perp d\vec{S}} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{E}_\sigma \cdot d\vec{S}}_{=0 \text{ car } \vec{E}_\sigma = \vec{0} \text{ pour } x < 0} + \iint_{S_3} \vec{E}_\sigma \cdot d\vec{S} = \iint_{S_3} E_\sigma(x) \vec{e}_x \cdot dS \vec{e}_x = \underline{E_\sigma(x) S}$$

et $Q_{int} = \sigma S$

$$\Rightarrow \boxed{E_{\sigma}(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ pour } x > 0}$$

$$\text{et } \boxed{E_{\sigma}(x) = 0 \text{ pour } x < 0}$$

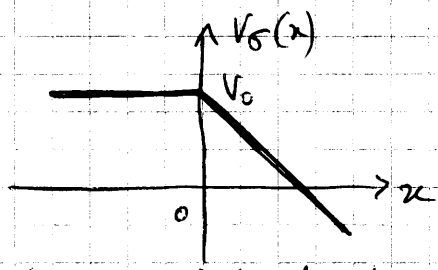
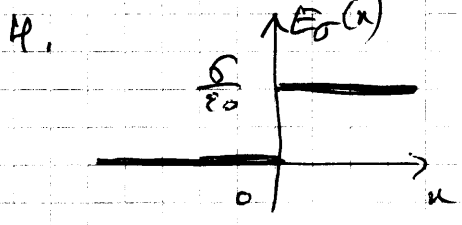
3. On a $dV_{\sigma} = -\vec{E}_{\sigma}(x) \cdot d\vec{0M} = -E_{\sigma}(x) dx$

donc pour $x \leq 0$: $dV_{\sigma} = 0 \Rightarrow V_{\sigma}(x) = C_1$

$x \geq 0$: $dV_{\sigma} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} dx \Rightarrow V_{\sigma}(x) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} x + C_2$

en prenant $V_{\sigma}(x=0) = V_0 > 0$, on a $C_1 = C_2 = V_0$

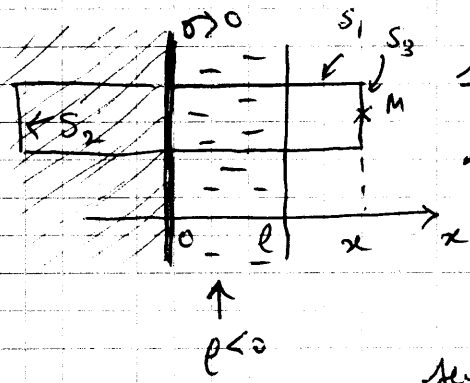
$$\text{soit } \boxed{\begin{aligned} V_{\sigma}(x) &= V_0 \text{ pour } x \leq 0 \\ &= -\frac{\sigma}{\epsilon_0} x + V_0 \text{ pour } x \geq 0 \end{aligned}}$$



$E_{\sigma}(x)$ bien continu partout sauf à la traversée de la surface chargée où il y a une discontinuité finie, bien égale à σ/ϵ_0 .

$V_{\sigma}(x)$ bien continu partout avec $V_{\sigma}(0) = V_0 > 0$.

III Présence d'une charge d'espace supplémentaire



1. $\vec{E}_{\text{tot}}(M) = E_{\text{tot}}(x) \vec{e}_x$ (m. démonstration p. en I.1)

2. a) $x > l$

appliquons le th. de Gauss sur m. surface de Gauss qu'au I.2 avec $x > l$:

seule Q_{int} change: $Q_{\text{int}} = \sigma S + \rho S l$

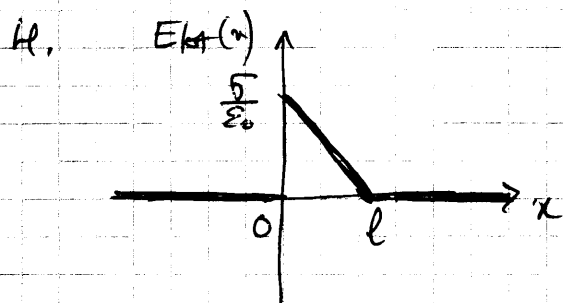
$$\Rightarrow E_{\text{tot}}(x) S = \frac{\sigma S + \rho S l}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{E_{\text{tot}}(x) = \frac{\sigma + \rho l}{\epsilon_0}} \text{ pour } x \geq l$$

b) $0 < x < l$:

$$Q_{\text{int}} = \sigma S + \rho S x \Rightarrow \boxed{E_{\text{tot}}(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} + \frac{\rho}{\epsilon_0} x} \text{ pour } 0 < x \leq l$$

3. $E_{\text{tot}}(x) = 0$ pour $x \geq l$ si $\boxed{\sigma + \rho l = 0}$ (σ et ρ bien de signes contraires!) 4.

↳ la couche ρ forme un écran électrostatique : un observateur situé à $x \geq l$ ne ressent plus le champ créé par le conducteur.



pour $0 < x \leq l$ | $E_{\text{tot}}(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{x}{l}$
et $\rho = -\sigma/l$

$E_{\text{tot}}(x)$ bien continu en $x = l$ (car \vec{E} est continu partout pr. abs. de charges volumiques)