CY Cergy Paris Université
Electromagnétisme 1
S3 - CUPGE / MP / P
C. Pinettes

Test n°10 : Magnétostatique - symétries et invariants

1. Rappeler les règles de symétrie et les règles d'invariance pour le champ magnétostatique.

   Le champ $\vec{B}(M)$ appartient aux plans de d'antisymétrie et est perpendiculaire aux plans de symétrie de la distribution de courant source *passant par* M :

   $$\boxed{\vec{B}(M) \perp \Pi(M)} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B}(M) \in \Pi^*(M)}$$

   Et d'après le principe de Curie (voir Q. 2 du test n°2), **le champ magnétostatique a les mêmes invariants que ses sources**, càd la distribution de courants.

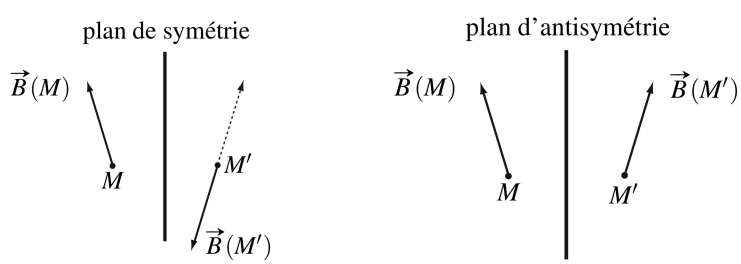
2. Quels renseignements sur le champ magnétostatique peut-on déduire des propriétés d'invariances d'une distribution de courants : par translation parallèlement à l'axe (Oz) ? par translation parallèlement au plan (xOy) ? par rotation autour de l'axe (Oz) ? par rotation autour du point O ?

   Lorsqu'une distribution de courants est invariante par :

   – translation parallèlement à l'axe (Oz) : $\|\vec{B}\|$ ne dépend pas de z
   – translation parallèlement au plan (xOy) : $\|\vec{B}\|$ ne dépend pas de x et y
   – rotation autour de (Oz) : $\|\vec{B}\|$ ne dépend pas de θ (en cylindrique)
   – rotation autour de (O) : $\|\vec{B}\|$ ne dépend pas de θ et ϕ (en sphérique)

3. Tracer le champ magnétique en M', symétrique du point M par rapport à Π ou Π^*, Π et Π^* étant respectivement un plan de symétrie et d'antisymétrie de la distribution de courants.

   Pour le champ magnétique, on a :



4. Donner la forme du champ magnétique en un point M quelconque de l'espace pour les distributions de courant suivantes :

   a) Fil fini et fil infini

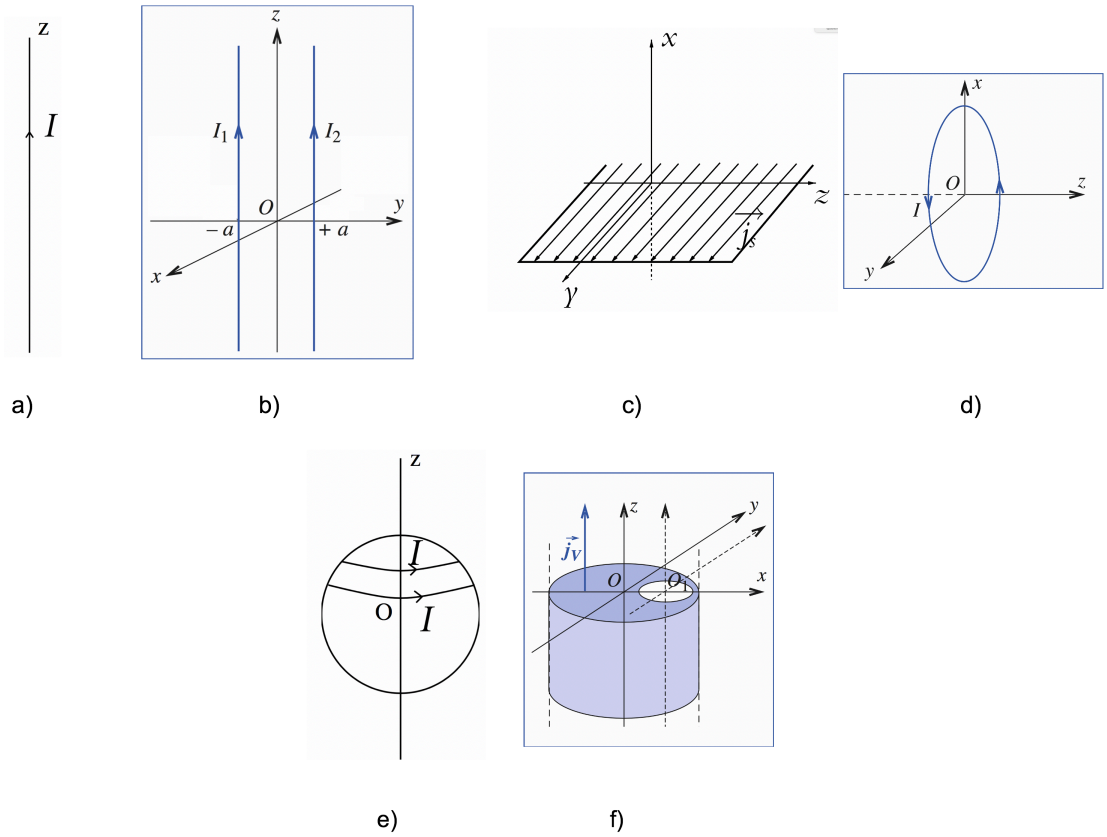
   b) 2 fils infinis : $I_1 = I_2$; $I_1 = -\ I_2$

   c) Nappe plane infinie parcourue par un courant surfacique uniforme

   d) Spire circulaire parcourue par un courant I

e) Sphère sur laquelle on a enroulé un fil parcouru par un courant I

f) Cylindre infini parcouru par un courant volumique uniforme avec une cavité cylindrique infinie d'axe (O_1z)



a) b) c) d)

e) f)

a) Pour le fil fini, en un point M quelconque repéré par ses coordonnées cylindriques :
Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants passant par M
$\Rightarrow \vec{B}(M) = B(r, \theta, z)\ \vec{u}_\theta$
La distribution de courants est invariante par rotation autour de (Oz)
$\Rightarrow B(r, \theta, z) = B(r, z)$
Conclusion : $\boxed{\vec{B}(M) = B(r, z)\ \vec{u}_\theta}$.

Pour le fil infini, la distribution de courants est en plus invariante par translation parallèlement à (Oz)
$\Rightarrow B(r, z) = B(r)$
Conclusion : $\boxed{\vec{B}(M) = B(r)\ \vec{u}_\theta}$.

b) Pour un point M quelconque repéré par ses coordonnées cartésiennes :
La distribution de courants est invariante par translation parallèlement à (Oz)
$\Rightarrow \vec{B}(M) = B(x, y)\ \vec{u}_M$ où $\vec{u}_M$ est un vecteur unitaire dépendant a priori du point M
Le plan $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants passant par M
$\Rightarrow \vec{B}(M) \in (M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$
Conclusion : $\boxed{\vec{B}(M) = B_x(x, y)\ \vec{u}_x + B_y(x, y)\ \vec{u}_y}$.

Si $M \in (0, y, z)$:

$(0, y, z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants passant par $M \Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = B(y)\ \vec{u}_x}$
(car on a $x = 0$ sur ce plan).

Si $M \in (0, x, z)$ et que $I_1 = I_2$:

$(0, x, z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants passant par $M \Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = B(x)\ \vec{u}_y}$
(car on a $y = 0$ sur ce plan).

Si $M \in (0, x, z)$ et que $I_1 = -\ I_2$:

$(0, x, z)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants passant par $M \Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = B(x)\ \vec{u}_x}$
(car on a $y = 0$ sur ce plan).

c) Pour un point M quelconque repéré par ses coordonnées cartésiennes :
Le plan $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants passant par M
$\Rightarrow \vec{B}(M) = B(x, y, z)\ \vec{u}_z$
La distribution de courants est invariante par translation parallèlement à (Oyz)
$\Rightarrow B(x, y, z) = B(x)$
Conclusion : $\boxed{\vec{B}(M) = B(x)\ \vec{u}_z}$.

d) Pour un point M quelconque repéré par ses coordonnées cylindriques :
La distribution de courants est invariante par rotation autour de (Oz)
$\Rightarrow \vec{B}(M) = B(r, z)\ \vec{u}_M$ où $\vec{u}_M$ est un vecteur unitaire dépendant a priori du point M
Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants passant par M
$\Rightarrow \vec{B}(M) \in (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$
Conclusion : $\boxed{\vec{B}(M) = B_r(r, z)\ \vec{u}_r + B_z(r, z)\ \vec{u}_z}$.

Si $M \in (Oz)$:
Tous les plans contenant (Oz) sont des plans d'antisymétrie passant par M
$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = B(z)\ \vec{u}_z}$ (car on a $r = 0$ sur (Oz)).

Si $M \in (O, x, y)$:
Le plan (O, x, y) est un plan de symétrie passant par M
$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = B(r)\ \vec{u}_z}$ (car on a $z = 0$ sur ce plan).

e) Pour un point M quelconque repéré par ses coordonnées cylindriques :
La distribution de courants est invariante par rotation autour de (Oz)
$\Rightarrow \vec{B}(M) = B(r, z)\ \vec{u}_M$ où $\vec{u}_M$ est un vecteur unitaire dépendant a priori du point M
Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants passant par M
$\Rightarrow \vec{B}(M) \in (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$
Conclusion : $\boxed{\vec{B}(M) = B_r(r, z)\ \vec{u}_r + B_z(r, z)\ \vec{u}_z}$.

Si $M \in (O, x, y)$:
Le plan (O, x, y) est un plan de symétrie de la distribution de courants passant par M
$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = B(r)\ \vec{u}_z}$ (car on a $z = 0$ sur ce plan).

f) Pour un point M quelconque repéré par ses coordonnées cartésiennes :
La distribution de courants est invariante par translation parallèlement à (Oz)

$\Rightarrow \vec{B}(M) = B(x,y)\ \vec{u}_M$ où $\vec{u}_M$ est un vecteur unitaire dépendant a priori du point M

Le plan $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants passant par M

$\Rightarrow \vec{B}(M) \in (M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$

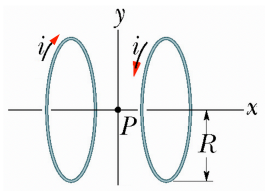
Conclusion : $\boxed{\vec{B}(M) = B_x(x,y)\ \vec{u}_x + B_y(x,y)\ \vec{u}_y}$.

Si $M \in (O, x, z)$:

Le plan (O, x, z) est un plan de symétrie de la distribution de courants passant par M

$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = B(x)\ \vec{u}_y}$ (car on a $y = 0$ sur ce plan).

5. On considère 2 spires circulaires parallèles et de même rayon, parcourues par des courants i opposés.



Peut-on dire ce que vaut le champ magnétique en P sans calcul ?

Tous les plans contenant (Px) sont des plans d'antisymétrie de la distribution de courants passant par P

$\Rightarrow \vec{B}(P) \parallel \vec{u}_x$

Le plan (P, y, z) est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants passant par P

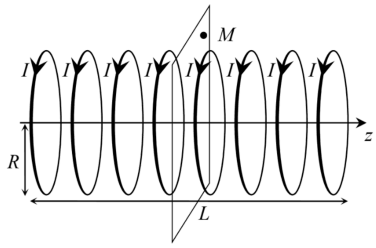
$\Rightarrow \vec{B}(P) \in (\vec{u}_y, \vec{u}_z)$

Conclusion : $\boxed{\vec{B}(P) = \vec{0}}$.

6. Etudier les invariances et symétries d'un solénoïde infini de spires circulaires d'axe Oz parcouru par un courant permanent I et indiquer leurs conséquences sur le champ magnétique créé par ce solénoïde en un point M quelconque de l'espace.

Le solénoïde étant à symétrie cylindrique, on choisit de repérer un point quelconque M par ses coordonnées cylindriques, $M(r, \theta, z)$.

Le courant suit une trajectoire en hélice, mais les spires étant jointives et de très faible section devant leur taille, on peut considérer que le solénoïde est **équivalent à un empilement de spires planes**.



Ainsi, le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants passant par M. $\vec{B}(M)$ est donc perpendiculaire à ce plan, soit selon $\vec{u}_z$:

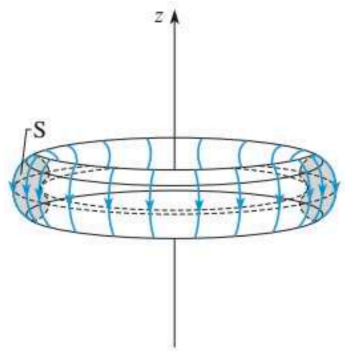
$$\vec{B}(M) = B(r, \theta, z)\ \vec{u}_z$$

Par ailleurs, le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants passant par M. $\vec{B}(M)$ est donc parallèle à ce plan, ce qui est bien cohérent avec le fait que $\vec{B}(M) \parallel \vec{u}_z$.

Enfin, la distribution de courant est invariante par rotation autour de Oz (spires circulaires) et par translation parallèlement à Oz (solénoïde infini), donc $\|\vec{B}(M)\|$ est indépendant de θ et z.
On en conclut que :

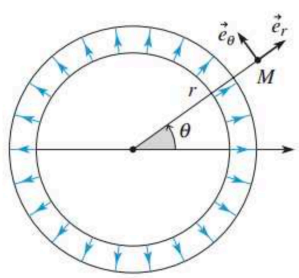
$$\boxed{\vec{B}(M) = B(r)\ \vec{u}_z}$$

7. Etudier les invariances et symétries d'une bobine torique d'axe Oz parcourue par un courant permanent I et indiquer leurs conséquences sur le champ magnétique créé par cette bobine en un point M quelconque de l'espace. On considérera la forme des spires quelconque.



La bobine torique ayant une symétrie de révolution autour de Oz, on choisit de repérer un point quelconque M par ses coordonnées cylindriques, $M(r, \theta, z)$.

Les spires étant jointives et de très faible section devant leur taille, on peut considérer que la bobine est **équivalente à un empilement de spires planes**.



Ainsi le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants passant par M. $\vec{B}(M)$ est donc perpendiculaire à ce plan, soit selon $\vec{u}_\theta$:

$$\vec{B}(M) = B(r, \theta, z)\ \vec{u}_\theta$$

Par ailleurs, la distribution de courant est invariante par rotation autour de Oz, donc $\|\vec{B}(M)\|$ est indépendant de θ.
On en conclut que :

$$\boxed{\vec{B}(M) = B(r, z)\ \vec{u}_\theta}$$

> *On remarquera que, à la différence du solénoïde infini (voir Q. 6), la distribution de courants n'est pas invariante par translation parallèlement à Oz, donc $\|\vec{B}(M)\|$ dépend a priori de z.*
>
> *Par ailleurs, si les spires sont symétriques par rapport au plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ (où O est le centre du tore) comme cela semble être le cas sur la figure, alors le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants. Donc si $M \in (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, $\vec{B}(M)$ appartient à ce plan, ce qui est bien cohérent avec le fait que $\vec{B}(M) \parallel \vec{u}_\theta$.*