

Partie C : CHAUFFAGE DANS UN FOUR À MICRO-ONDES

Une brioche (gâteau) notée **(B)**, considérée comme homogène, isotrope et sphérique (rayon R et centre O), est réchauffée dans un four à micro-ondes.

Hypothèses de travail :

- tout point M de l'espace est repéré notamment par le vecteur $\vec{OM} = r \vec{e}_r$, avec \vec{e}_r vecteur « tournant » d'un système de coordonnées sphériques, d'origine O ;
- la sphère **(B)**, constituée d'un matériau de conductivité thermique λ constante, est conductrice de la chaleur ;
- la conduction thermique est unidimensionnelle (variable r) et radiale : les surfaces isothermes sont sphériques, de centre O ;
- à l'intérieur de **(B)**, $\vec{j}_{th}(r)$ (en W m^{-2}) est le vecteur densité de flux thermique, vecteur radial, et $\Phi(r)$ (en W) le flux thermique à travers la sphère de rayon r , de centre O et de surface $S(r)$;
- \vec{j}_{th} est lié à la température par la loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{\text{grad}} T$, expression qui s'écrit, compte tenu des considérations de symétrie :

$$\vec{j}_{th} = j_{th}(r, t) \vec{e}_r = -\lambda \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \vec{e}_r ;$$

- à l'intérieur du four, l'appareil délivre une puissance thermique totale P_{th} constante, entièrement absorbée par **(B)** (l'air sec enveloppant la brioche est insensible aux micro-ondes) ;
- la puissance volumique p (en W m^{-3}), absorbée à l'intérieur du gâteau, est supposée uniforme et constante ;
- le flux thermique sortant de la brioche s'évacue rapidement, grâce à l'air ventilé, à l'extérieur du four : la paroi externe de **(B)** est ainsi maintenue à la température constante T_o ;

- l'air sec enveloppant la brioche ne présente aucune absorption thermique, et est maintenu à la température constante T_o ;
 - le phénomène est envisagé en régime permanent et stationnaire : $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT(r)}{dr} \vec{e}_r$.
- 1) Rappeler la relation qui existe entre $\Phi(r)$, $j_{th}(r)$ et $S(r)$.
 - 2) Soit le volume élémentaire dV de (\mathbf{B}) , compris entre les sphères concentriques, de centre O et de rayons respectifs r et $r+dr$. Exprimer, en fonction de la variable r , le volume élémentaire dV .
 - 3) En déduire, en fonction de p et de la variable r , la puissance thermique dP_{th} reçue, grâce à l'absorption des micro-ondes, par cet élément de volume dV .
 - 4) Présenter, toujours pour cet élément de volume élémentaire dV , un bilan des flux thermiques, c'est-à-dire une relation entre les flux $\Phi(r)$ et $\Phi(r+dr)$.
 - 5) En déduire une équation différentielle reliant la fonction $T(r)$ et la variable r , et qui s'écrit sous la forme : $\frac{dT(r)}{dr} = K_1 r + \frac{K_2}{r^2}$, avec K_1 et K_2 constantes.
 - 6) Quelles relations existe-t-il, toujours en régime stationnaire, entre $\Phi(R)$ et P_{th} d'une part, et P_{th} et p d'autre part ?
 - 7) En déduire la valeur de la constante K_2 .
 - 8) Intégrer l'équation différentielle de la question § 5, et déterminer l'expression de la température $T(r)$ à l'intérieur de la brioche, en se rappelant que $T(R) = T_o$.
 - 9) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $T(r)$.
 - 10) Localiser la partie la plus « carbonisée » de la brioche, si celle-ci est maintenue trop longtemps dans le four en fonctionnement.

Fin de l'énoncé