1

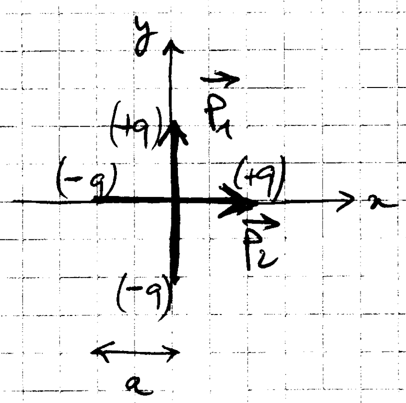
Exo 2 - TD 1 : Quadrupôle électrique

a) On cherche $\phi(M)$ en M situé loin des charges

→ on se place dans l'approximation dipolaire

les 4 charges peuvent être vues comme la superposition de 2 dipôles : $\vec{P_1} = 2aq\,\vec{u_x}$

$\vec{P_2} = 2aq\,\vec{u_y}$



D'après le principe de superposition

$$\phi(M) = \underbrace{\phi_1(M)}_{\text{créé par dipôle } \vec{p_1}} + \underbrace{\phi_2(M)}_{\text{créé par dipôle } \vec{p_2}}$$

Or dans l'approx. dipolaire ($r \gg a$) :

$$\phi(M) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P_1}\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P_2}\cdot\vec{r}}{r^3} \quad \text{avec } r = \|\vec{OM}\|$$

$$\simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\vec{P_1}+\vec{P_2}\right)\cdot\vec{r}$$

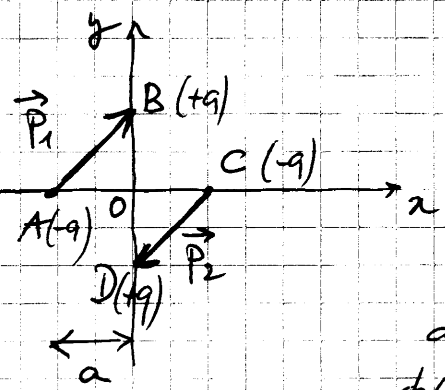
$$\simeq \frac{2aq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\vec{u_x}+\vec{u_y}\right)\cdot\left(x\vec{u_x}+y\vec{u_y}+z\vec{u_z}\right)$$

$$\simeq \frac{2aq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x+y)$$

soit $\boxed{\phi(x,y,z) \simeq \frac{2aq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x+y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}}$ loin des charges

Exo2 - TD 1 : Quadrupôle électrique

b)



Les 4 charges peuvent être vues comme la superposition de 2 dipôles $\vec{p_1}$ et $\vec{p_2}$

mais ici $\vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{0}$

donc dans l'approx. dipolaire $(r \gg a)$

$$\phi(M) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p_1} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p_2} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$\simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} (\vec{p_1} + \vec{p_2}) \cdot \vec{r} \simeq 0$$ au 1er ordre en $\frac{a}{r}$ du dév. dipolaire

$\Rightarrow$ il faut aller à l'ordre d'après dans le développement en $\frac{a}{r} \ll 1$

$$\phi(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{\|\vec{AM}\|} + \frac{1}{\|\vec{BM}\|} - \frac{1}{\|\vec{CM}\|} + \frac{1}{\|\vec{DM}\|} \right)$$

- or $\vec{AM} = \vec{AO} + \vec{OM} = a\,\vec{u_x} + \vec{r}$

$$\|\vec{AM}\|^2 = \vec{AM}^2 = a^2 + 2a\,\vec{u_x} \cdot \vec{r} + r^2 = a^2 + 2ax + r^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|\vec{AM}\|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2ax + a^2}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{2ax}{r^2} + \frac{a^2}{r^2} \right)^{-1/2}$$

et on fait un D.L à l'ordre 2 en $\frac{a}{r} \ll 1$

sachant que pour $x \ll 1$: $(1+x)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2}x + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\frac{x^2}{2} + \cdots$

$$\simeq 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots$$

[le terme $\frac{ax}{r^2} = \frac{ar}{r^2} \sin\theta \cos\varphi = \frac{a}{r} \sin\theta \cos\varphi$ est d'ordre 1 en $\frac{a}{r}$]

$$\Rightarrow \frac{1}{\|\vec{AM}\|} \simeq \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2ax}{r^2} + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8}\left(\frac{2ax}{r^2} + \frac{a^2}{r^2} \right)^2 + \cdots \right]$$

$$\simeq \frac{1}{r} \left[1 - \frac{ax}{r^2} - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3}{8} \frac{4a^2x^2}{r^4} + \cdots \right]$$ à l'ordre 2

$$\simeq \frac{1}{r} \left[1 - \underbrace{\frac{ax}{r^2}}_{\text{terme en } \frac{a}{r}} - \underbrace{\frac{a^2}{2r^2}}_{\text{en } \frac{a^2}{r^2}} + \underbrace{\frac{3}{2} \frac{a^2x^2}{r^4}}_{\text{en } \frac{a^2}{r^2}} + \cdots \right]$$ à l'ordre 2

• de $\vec{m}$: $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM} = -a\vec{u_y} + \vec{r}$

$$\|\overrightarrow{BM}\|^2 = a^2 - 2ay + r^2$$

↳ il suffit de changer x en $-y$ dans le dév. précédent :

$$\frac{1}{\|\overrightarrow{BM}\|} \simeq \frac{1}{r}\left[1 + \frac{ay}{r^2} - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3}{2}\frac{a^2y^2}{r^4} + \dots\right] \text{ à l'ordre 2}$$

• $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OM} = -a\vec{u_x} + \vec{r}$

$$\|\overrightarrow{CM}\|^2 = a^2 - 2ax + r^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|\overrightarrow{CM}\|} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{en changeant} \\ x \text{ en } -x}}{\simeq} \frac{1}{r}\left[1 + \frac{ax}{r^2} - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3}{2}\frac{a^2x^2}{r^4} + \dots\right] \text{ à l'ordre 2}$$

• $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OM} = a\vec{u_y} + \vec{r}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|\overrightarrow{DM}\|} \underset{\substack{\uparrow \\ x \to y}}{\simeq} \frac{1}{r}\left[1 - \frac{ay}{r^2} - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3}{2}\frac{a^2y^2}{r^4} + \dots\right] \text{ à l'ordre 2}$$

• on a donc

$$\phi(M) \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[-\left(\cancel{1} - \cancel{\frac{ax}{r^2}} - \cancel{\frac{a^2}{2r^2}} + \frac{3}{2}\frac{a^2x^2}{r^4}\right) + \left(\cancel{1} + \cancel{\frac{ay}{r^2}} - \cancel{\frac{a^2}{2r^2}} + \frac{3}{2}\frac{a^2y^2}{r^4}\right)\right.$$
$$-\left(\cancel{1} + \cancel{\frac{ax}{r^2}} - \cancel{\frac{a^2}{2r^2}} + \frac{3}{2}\frac{a^2x^2}{r^4}\right) + \left(\cancel{1} - \cancel{\frac{ay}{r^2}} - \cancel{\frac{a^2}{2r^2}} + \frac{3}{2}\frac{a^2y^2}{r^4}\right)$$
$$\left. + \dots\right]$$

$$\simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,\frac{3a^2(y^2 - x^2)}{r^4} \simeq \frac{3qa^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{y^2 - x^2}{r^5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(x,y,z) \simeq \frac{3qa^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}}$$ loin des charges.

↳ il s'agit d'un terme en $\frac{1}{r^3}$ = terme quadrupolaire