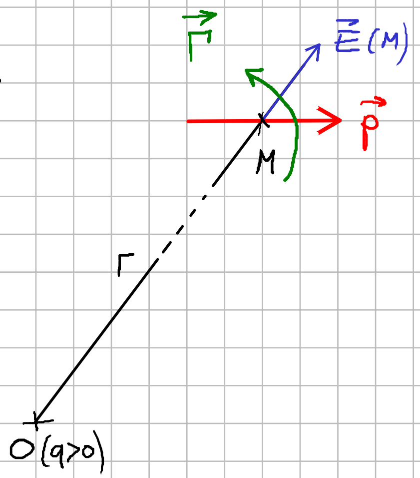
**Exo 5 : Dipôle électrique dans un champ non uniforme**

1.




On se place dans l'approximation dipolaire :

$r \gg$ taille du dipôle

$\Rightarrow$ on peut considérer que le chp $\vec{E}$ créé par la charge ponctuelle $q$ est quasi-uniforme au niveau du dipôle

$\Rightarrow$ le dipôle est soumis au couple

$$\vec{\Gamma} \simeq -\vec{p} \wedge \vec{E}(M)$$ où M est situé au centre du dipôle

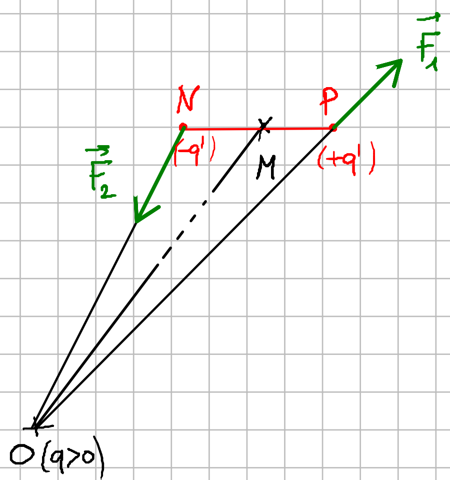
lequel tend à aligner le moment dipolaire avec $\vec{E}(M)$

[ On aurait aussi pu raisonner sur l'énergie potentielle du dipôle :

$$E_p \simeq -\vec{p} \cdot \vec{E}(M)$$

qui est minimale lorsque $\vec{p}$ est aligné avec $\vec{E}(M)$ (= position d'équilibre stable) ]

[ On peut montrer facilement ces expressions de $\vec{\Gamma}$ et $E_p$ dans un chp $\vec{E}$ non uniforme :




Considérons le dipôle $(-q', +q')$ de moment dipolaire $\vec{p} = q' \vec{NP}$ avec $\|\vec{NP}\| = 2a$

Il est soumis à la force :

$$\vec{F} = q' \vec{E}(P) - q' \vec{E}(N)$$

avec $\vec{E}(P) = \vec{E}(M) + \delta \vec{E}_1$
$\vec{E}(N) = \vec{E}(M) + \delta \vec{E}_2$ ds l'approx. dipolaire ($r \gg a$)

les 2 forces de Coulomb $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ exercent un couple de moment par rapport à M :

$$\vec{\Gamma} = \vec{MP} \wedge q' \vec{E}(P) + \vec{MN} \wedge (-q' \vec{E}(N))$$

$$= q'(\vec{MP} - \vec{MN}) \wedge \vec{E}(M) + q' \vec{MP} \wedge \delta \vec{E}_1 - q' \vec{MN} \wedge \delta \vec{E}_2$$

$$\simeq q' \vec{NP} \wedge \vec{E}(M) \quad \text{à l'ordre le + bas}$$

$$\simeq \vec{p} \wedge \vec{E}(M)$$

et l'énergie potentielle du dipôle vaut :

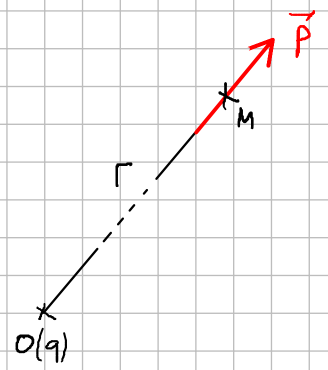
$$E_p = q'\,V(P) - q'\,V(N) = q'\int_N^P dV = -q'\int_N^P \vec{E}(M')\cdot d\vec{OM'}$$

$$\simeq -q'\,\vec{E}(M)\cdot\int_N^P d\vec{OM'} \quad \text{car } \vec{E}(M') \simeq \vec{E}(M) \text{ sur } [NP] \text{ ds l'approx. dipolaire}$$

$$\simeq -q'\,\vec{E}(M)\cdot\vec{NP} \simeq -\vec{p}\cdot\vec{E}(M)$$

]

2. le dipôle est initialement aligné avec $\vec{E}(M)$ :




$\Rightarrow \vec{p} = p\,\vec{u_r}$ avec $p > 0$

et $\vec{E}(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\vec{u_r}$

$\Rightarrow$ la force qui s'exerce sur le dipôle vaut :

$$\vec{F} = -\vec{grad}\,E_p \simeq \vec{grad}(\vec{p}\cdot\vec{E}(M)) \simeq p\,\vec{grad}\,E(r)\,\vec{u_r}$$

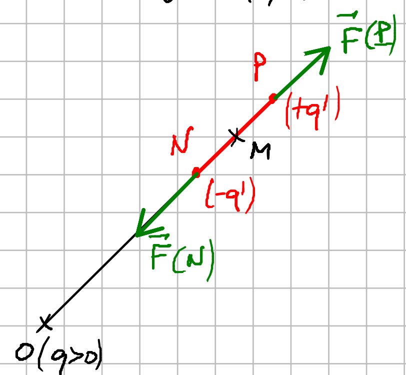
$$\simeq p\,\frac{dE}{dr}\,\vec{u_r}$$

$$\simeq -\frac{pq}{2\pi\varepsilon r^3}\,\vec{u_r}$$

↳ la force est dirigée selon $-\vec{u_r}$ : le dipôle se déplace vers les zones de champ intense

↳ ce résultat est général (voir Q. de cours)

[ le résultat est évident si on regarde les forces de Coulomb s'exerçant sur chaque charge $-q'$, $q'$ du dipôle :




N étant plus près de O que P, on a :

$$\|\vec{E}(N)\| > \|\vec{E}(P)\| \Rightarrow \|\vec{F}(N)\| > \|\vec{F}(P)\|$$

$\Rightarrow$ le dipôle (rigide) est attiré par la charge $q > 0$

]

[On aurait pu calculer $\vec{F}$ directement ici pour un dipôle de taille $\|\vec{NP}\| = 2a$ :

$$\vec{F} = -q' \frac{q}{4\pi\varepsilon(r-a)^2}\,\vec{u_r} + q' \frac{q}{4\pi\varepsilon(r+a)^2}\,\vec{u_r}$$

$$= \frac{qq'}{4\pi\varepsilon r^2}\left[-\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-2} + \left(1+\frac{a}{r}\right)^{-2}\right]\vec{u_r}$$

$$\simeq \frac{qq'}{4\pi\varepsilon r^2}\left(-1-\frac{2a}{r}+1-\frac{2a}{r}\right)\vec{u_r} \quad \text{pour } r \gg a$$

$$\simeq -\frac{qq'2a}{2\pi\varepsilon r^3}\,\vec{u_r} \simeq -\frac{pq}{2\pi\varepsilon r^3}\,\vec{u_r} \quad \text{puisque } p = q'\|\vec{NP}\| = q'2a \,]$$