

Polarisation en régime variable : zones de transparence et d'absorption

1°) Modèle de l'e⁻ élastiquement lié :

milieu = vapeur atomique t.g

- diélectrique lié : se polarise ss l'effet d'un champ \vec{E} appliqué

$$t.g \quad \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

- non polaire : les atomes ne possèdent pas de moment dipolaire électrique
 ⇒ il s'agit d'une polarisation électronique qui résulte de la déformation du nuage électronique ss l'action d'un champ \vec{E}

- peu dense : les atomes n'interagissent pas entre eux ⇒ les e⁻ liés sont indépendants et ne voient pas les champs électriques créés par les dipôles voisins
 ↳ chaque atome voit donc le champ \vec{E} macroscopique appliqué

- non magnétique : $\mu_r = 1 \Rightarrow \mu = \mu_0$

- e⁻ non relativiste ⇒ $\frac{\|\vec{F}_{magn}\|}{\|\vec{F}_{élect}\|} \approx \frac{e v B}{e E} \approx \frac{h \nu}{c} \ll 1$ (car $B = \frac{h \nu}{c}$)

- le poids est négligeable devant la force électrique

- atomes avec 1 seul e⁻ lié

- e⁻ élastiquement lié à l'atome via la force de rappel élastique

$$\vec{f} = -m \omega_0^2 \vec{r} \quad \text{à } \vec{r} = \text{déplacement de l'e}^- \text{ par rapport à sa position d'équilibre}$$

- les pertes énergétiques par rayonnement sont modifiées par une force de frottement fluide $\vec{f}' = -m \Gamma \frac{d\vec{r}}{dt}$ tq $\Gamma \ll \omega_0$ et de référentiel terrestre supposé galiléen

↳ ces 2 forces sont des forces phénoménologiques

Donc la 2^e loi de Newton appliquée à 1 e⁻ lié s'écrit :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m \omega_0^2 \vec{r} - m \Gamma \frac{d\vec{r}}{dt} - e \vec{E}$$

L'e⁻ étant lié à l'atome, son déplacement $r \leq a_0 = \text{taille de l'atome} \approx 1 \text{ \AA}$

⇒ si $a_0 \ll \lambda = \text{long. d'onde du champ } \vec{E} \text{ appliqué}$

alors \vec{E} est quasi uniforme à l'échelle de l'atome : $\vec{E} \approx \vec{E}_0 e^{i \omega t}$

L'éq. du mvtt s'écrit donc : $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \Gamma \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{i \omega t}$

En régime sinusoïdal forcé, les solutions sont de la forme: $\underline{\vec{I}} = \underline{\vec{I}}_0 e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow -\omega^2 \underline{\vec{I}} + i\Gamma\omega \underline{\vec{I}} + \omega_0^2 \underline{\vec{I}} = -\frac{e}{m} \underline{\vec{E}}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{I}} = \frac{-e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \underline{\vec{E}}$$

2°) On a N dipôles $\vec{p} = -e\vec{r}$ par unité de volume

$$\Rightarrow \text{le vecteur polarisation vaut: } \underline{\vec{P}} = N \underline{\vec{p}} = -Ne \underline{\vec{I}}$$

$$\text{Or } \underline{\vec{P}} = \epsilon \chi \underline{\vec{E}}$$

$$\Rightarrow \chi(\omega) = \frac{Ne^2/\epsilon_0 m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \quad \left[\text{on peut remarquer que } Ne^2/\epsilon_0 m = \omega_p^2 \right. \\ \left. = \text{pulsation plasma} \right]$$

$$\Rightarrow \chi(u) = \frac{\chi_0}{1 - u^2 + i\alpha u}$$

$$\text{avec } u = \frac{\omega}{\omega_0}, \alpha = \frac{\Gamma}{\omega_0} \ll 1 \text{ et } \chi_0 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2} = \chi(u=0) = \text{susceptibilité statique}$$

$\hookrightarrow \chi$ caractérise la réponse du milieu à l'excitation du champ $\underline{\vec{E}}$

χ dépend de ω

et est complexe $\Rightarrow \underline{\vec{P}}$ et $\underline{\vec{E}}$ sont déphasés a priori

$$3°) \bullet \text{ Sachant que } \epsilon_r = 1 + \chi = 1 + \frac{\chi_0 (1 - u^2 - i\alpha u)}{(1 - u^2)^2 + \alpha^2 u^2}$$

$$\Rightarrow \text{on a bien } \epsilon_r = \epsilon_r' - i \epsilon_r''$$

$$\text{avec } \epsilon_r'(u) = 1 + \frac{\chi_0 (1 - u^2)}{(1 - u^2)^2 + \alpha^2 u^2}$$

$$\epsilon_r''(u) = \frac{\chi_0 \alpha u}{(1 - u^2)^2 + \alpha^2 u^2} \quad \forall \alpha > 0!$$

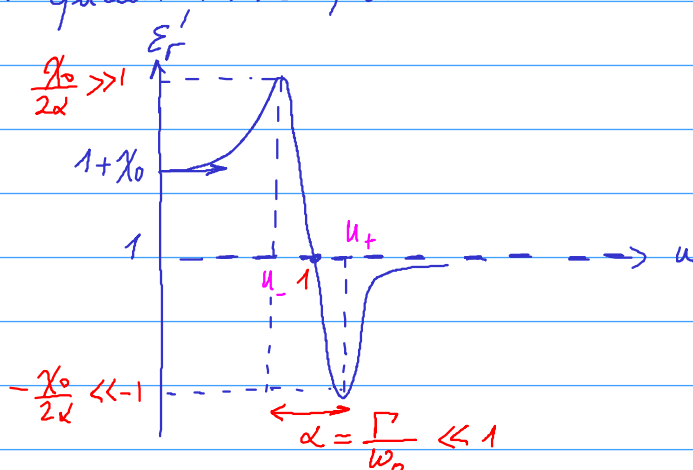
• Tracé de $\epsilon_r'(u)$ pour $u > 0$:

$$\epsilon_r'(0) = 1 + \chi_0$$

$$\epsilon_r'(u) > 1 \text{ pour } u < 1, \epsilon_r'(1) = 1 \text{ et } \epsilon_r'(u) < 1 \text{ pour } u > 1$$

$$\epsilon_r'(u) \simeq 1 - \chi_0 \frac{u^2}{u^4} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 1$$

⇒ qualitativement, on a :



⇒ en réalité les pics sont
très étroits
et très intenses !

↳ on peut rechercher les extrémums u_- et u_+ :

$$\frac{\partial \varepsilon'_r}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow -\frac{2\chi_0 u}{[\]} + \chi_0(1-u^2) \left(-\frac{2(1-u^2)(-2u) + 2\alpha^2 u}{[\]^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\chi_0 u [(1-u^2)^2 + \alpha^2 u^2] + 4\chi_0 u (1-u^2)^2 - 2\chi_0 \alpha^2 u (1-u^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow u = 0$$

$$\alpha - \cancel{2} (1-u^2)^2 - \cancel{2} \alpha^2 u + \cancel{4} (1-u^2)^2 - \cancel{2} \alpha^2 + \cancel{2} \alpha^2 u^2 = 0$$

$$\text{soit } (1-u^2)^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow 1-u^2 = \pm \alpha^2 \Leftrightarrow u^2 = 1 \pm \alpha$$

$$\text{et comme } \alpha \ll 1 \Rightarrow u_{\pm} = 1 \pm \frac{\alpha}{2}$$

⇒ les extrémums sont en $\begin{cases} u_{\pm} = 1 \pm \frac{\alpha}{2} \\ u = 0 \end{cases}$ avec $\alpha \ll 1$

$$\text{et } \varepsilon'_r(u_-) = \frac{1 + \chi_0 \alpha}{\alpha^2 \underbrace{(1+u_-^2)}_{=2-\alpha}} = \frac{1 + \chi_0}{\alpha(2-\alpha)} \simeq \frac{\chi_0}{2\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} +\infty$$

$$\varepsilon'_r(u_+) = 1 - \frac{\chi_0 \alpha}{\alpha^2(2+\alpha)} \simeq -\frac{\chi_0}{2\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} -\infty$$

↳ les 2 pics autour de ω_0 sont très proches de ω_0
très étroits et très intenses

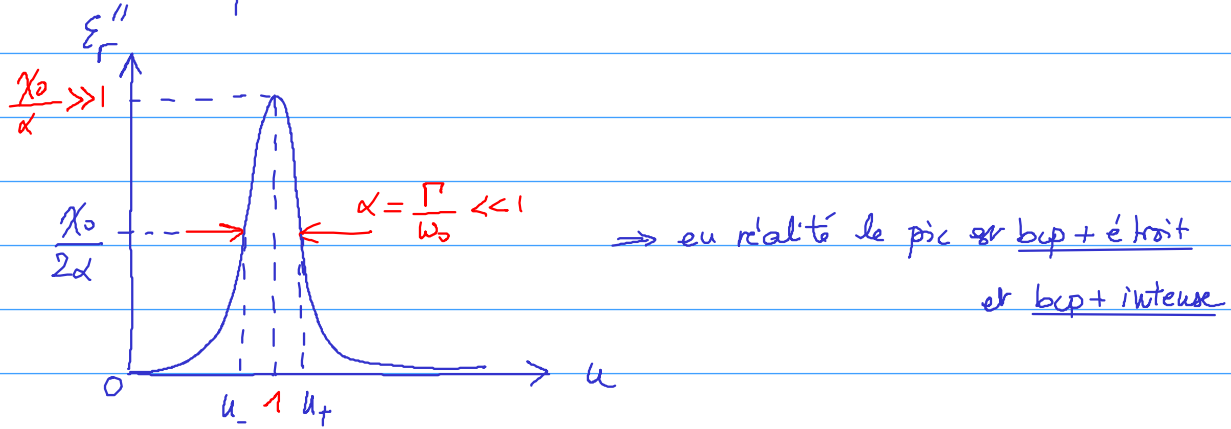
• Tracé de $\varepsilon''_r(u)$ pour $u > 0$:

$$\varepsilon''_r(u) > 0 \quad \forall u > 0$$

$$\varepsilon''_r(0) = 0$$

$$\varepsilon''_r(u) \simeq \frac{\chi_0 \alpha u}{u^4} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$$

On a donc qualitativement :



↳ on peut chercher le maximum :

$$\frac{\partial \varepsilon''_r}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow \frac{\chi_0 \alpha}{[]} + \chi_0 \alpha u \left(\frac{-2(1-u^2)(-2u) + 2\alpha^2 u}{[]^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \chi_0 \alpha [(1-u^2)^2 + \alpha^2 u^2] + 4\chi_0 \alpha u^2(1-u^2) - 2\chi_0 \alpha^2 u^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-u^2)^2 + \alpha^2 u^2 + 4u^2(1-u^2) - 2\alpha^2 u^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-u^2)(1+3u^2) = \alpha^2 u^2$$

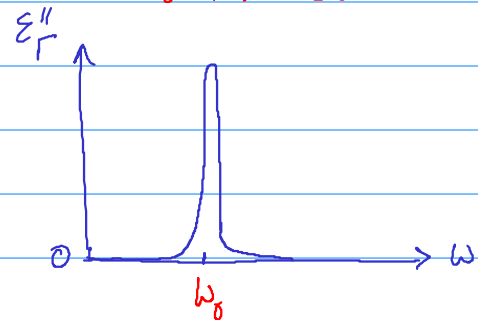
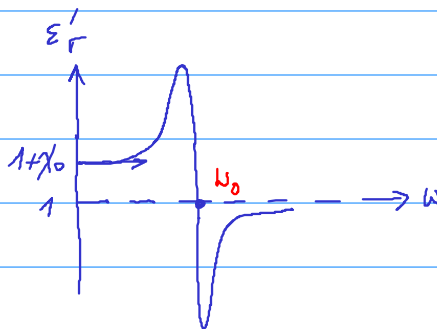
or $\alpha \ll 1 \Rightarrow u \approx 1$

et $\varepsilon''_r(u=1) = \frac{\chi_0}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} +\infty$

$$\varepsilon''_r(u_{\pm}) = \frac{\chi_0 \alpha (1 \pm \alpha/2)}{\alpha^2 (2 \pm \alpha)} \approx \frac{\chi_0}{2\alpha} \quad \text{avec } u_{\pm} = 1 \pm \frac{\alpha}{2}$$

↳ on a une résonance en $u \approx 1$ c'ad en $\omega = \omega_0$ très étroite et très intense

Au final, on a :



- ⇒ si $\omega \ll \omega_0$ $\varepsilon_r \approx 1 + \chi_0$ réel et quasi constant
- si $\omega \gg \omega_0$ $\varepsilon_r \approx 1$ réel et quasi constant
- si $\omega \approx \omega_0$ $\varepsilon_r \neq 0$ ε_r complexe et varie fortement avec ω

4°) La relation de dispersion d'une OPPM $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$ dans un diélectrique lhi s'écrit:

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\epsilon}_r = \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon_r' - i \epsilon_r'')$$

$$\Rightarrow \underline{k} = k' - ik'' \text{ avec } k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r' \text{ et } 2kk'' = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r'' > 0$$

$$\Rightarrow \text{si } k' > 0 \text{ alors } k'' > 0$$

$$\begin{aligned} \bullet \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t - (k' - ik'')z)} \\ &= \vec{E}_0 e^{-k''z} e^{i(\omega t - k'z)} \end{aligned}$$

\uparrow terme d'absorption sur distance $\delta = 1/k''$

\uparrow terme de propagation selon $+\vec{u}_z$ (car $k' > 0$) à la vitesse $v_p = \frac{\omega}{k'}$

c'est une onde progressive amortie

\Rightarrow l'onde est absorbée si $k'' \neq 0$ c'éd si $\epsilon_r'' \neq 0$ si $\omega \neq \omega_0$
 \hookrightarrow l'absorption est due au terme imaginaire $i\Gamma\omega$ de χ , c'éd à la présence du terme dissipatif $-m\Gamma \frac{d\vec{r}}{dt}$ de l'éq. du movt, comme attendu!

$\Rightarrow \epsilon_r'$ dépend de $\omega \Rightarrow k'$ aussi $\Rightarrow v_p$ dépend de ω : le milieu est dispersif
 \hookrightarrow un paquet d'ondes se déforme en se propageant

5°) Dans un diélectrique lhi, on a pour une OPPM: $\underline{k} = \underline{n} k_0$ avec $k_0 = \frac{\omega}{c}$

$$\Rightarrow \underline{n} = n' - in'' \text{ avec } \begin{aligned} k' &= n' \frac{\omega}{c} \text{ associé au terme de propagation} \\ k'' &= n'' \frac{\omega}{c} \text{ " " d'absorption} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{n''\omega}{c}z} e^{i(\omega t - \frac{n'\omega}{c}z)}$$

\Rightarrow l'onde se propage dans le milieu à la vitesse $v_p = \frac{c}{n'}$
 et s'affaiblit sur une distance caractéristique $\delta = \frac{c}{n''\omega}$

$\Rightarrow n'$ est l'indice de réfraction
 et n'' l'indice d'absorption

6°) Conclusion :

- ω est loin de ω_0

- on a χ, ϵ_r, k, n réels $\Rightarrow k'' = 0$

\Rightarrow l'onde n'est pas absorbée par le milieu

\Rightarrow le milieu est transparent pour l'onde em

- on a $\epsilon_r'(\omega) \simeq \omega_0^2$ [$\epsilon_r'(\omega) \simeq 1 + \chi_0$ si $\omega < \omega_0$
 $\simeq 1$ si $\omega > \omega_0$]

$\Rightarrow k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r'}$ soit $v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r'}} \simeq \omega_0^2$

\Rightarrow le milieu est très peu dispersif

- si $\omega \simeq \omega_0$

- on a χ, ϵ_r, k et n complexes $\Rightarrow k'' \neq 0$

\Rightarrow l'onde est absorbée $\omega_0 =$ pulsation d'absorption

\Rightarrow l'atome présente une raie d'absorption $\hat{=} \omega_0!$

- on a $\epsilon_r'(\omega)$ qui varie très fortement

\Rightarrow le milieu est fortement dispersif

On peut aussi remarquer que :

- si $\omega \ll \omega_0$ $\epsilon_r \simeq 1 + \chi_0 \rightarrow$ on retrouve bien les résultats du régime stationnaire

et \vec{P} et \vec{E} ne sont pas déphasés \rightarrow les variations du champ \vec{E} sont suffisamment lentes ici pr que les e^- puissent le suivre instantanément

- si $\omega \gg \omega_0$ $\epsilon_r \simeq 1$ et le milieu se comporte comme le vide

\hookrightarrow le champ \vec{E} varie trop vite pour que les e^- puissent suivre ses variations et l'onde passe sans "voir" le milieu

- les raies d'absorption dues à la polarisation électronique sont dues à la déformation du nuage électronique sous l'effet d'un champ \vec{E} dans notre modèle classique

\hookrightarrow Elles correspondent aux raies des transitions électroniques en phys. quantique et sont situées dans la plupart des cas dans le visible et les UV

9 cas commentaires :

→ Le modèle est limité au cas des atomes à 1 e^-

↳ dans le cas général, il faut ajouter les contributions des diverses charges liées (e^- , noyaux, ions) :

$$\Rightarrow \underline{\epsilon_r} = 1 + \sum_i \frac{w_{pi}^2}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 + i\Gamma_i \omega} \quad w_{pi} = \frac{n_i q_i^2}{\epsilon_0 m_i}$$

ω_{0i}, Γ_i caractérisent les forces subies par la charge n_i^0

→ le milieu possède alors plusieurs domaines d'absorption

→ Dans le cas d'un milieu dense, les atomes et donc les dipôles induits interagissent entre eux

et les atomes ressentent les champs électriques créés par les charges liées voisines, donc on ne peut plus confondre champ local et champ appliqué

↳ on peut montrer cependant que cela ne change pas fondamentalement le résultat !

Compléments

• L'atome H n'a qu'un e^- lié comme dans notre modèle classique ici mais son spectre possède de nombreuses raies d'absorption, contrairement à ce qu'on a obtenu ici...

↳ seule la **théorie quantique** permet de rendre compte de la **multiplicité des raies** : les $f.$ d'absorption correspondent aux transitions entre \neq niveaux d'énergie : $\omega_{12} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$

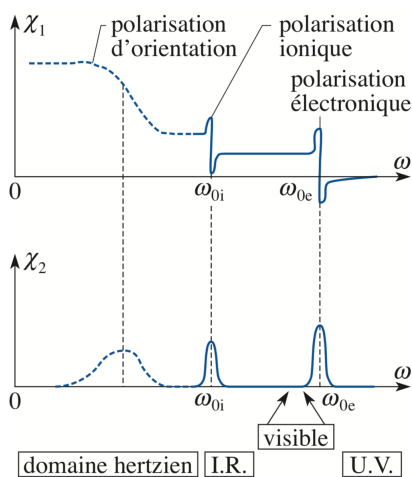
↳ la phys. quantique montre aussi qu'il faut remplacer la densité électronique N par $N_1 - N_2 =$ la \neq de population entre les niveaux E_1 et E_2 , car N_1 et N_2 dépendent de l'énergie de l'onde qui traverse le milieu

En particulier, on peut avoir $N_2 > N_1$ (càd une inversion de population) ce qui correspond à un $k'' < 0$ et donc à une **amplification de l'onde** dans le milieu, ce que l'on appelle **l'effet laser** !

↳ la physique quantique permet aussi de déterminer les **intensités relatives des \neq raies** : les raies les + intenses correspondent aux transitions entre niveaux d'énergie les + probables

• Dans un milieu diélectrique, les **3 mécanismes de polarisation** (électronique, ionique et d'orientation) peuvent se produire simultanément mais les pulsations propres associées à ces mécanismes de polarisation sont \neq .

Typiquement, pour **l'eau** (polaire), on a :



→ une zone de **transparence** dans le **visible** et les **UV lointains et RX**

→ des zones d'**absorption** dans :

- les **UV** associée aux transitions électroniques

- les **IR** " aux modes de vibration des molécules

- les **ondes centimétriques** associée aux modes de rotation des molé d'eau polaire (à la base du fonctionnement des fours à micro-ondes !)

[les $f.$ de vibration et rotation sont + faibles que les $f.$ électroniques car elles sont liées aux mvts des molécules qui sont bcp + massives que les e^-]