CY Cergy Paris Université — Avril 2024
L3-P/MP - Electromagnétisme 3

Examen Electromagnétisme 3 : 2h
Documents, calculettes, portables interdits

Les 2 exercices sont indépendants.

Exercice 1 : Cylindre sous un champ magnétique transverse

On considère un cylindre d'axe Oz, de rayon R et de hauteur h que l'on supposera très grande devant R. Ce cylindre est constitué d'un milieu magnétique LHI avec une perméabilité relative μ_r. Il est plongée dans un champ magnétique extérieur et uniforme : $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_x$ qui est perpendiculaire à son axe. On suppose que ce champ magnétique s'applique partout dans l'espace et qu'il n'y a aucune source de courant, autre que les courants d'aimantation du cylindre. On cherche à déterminer le vecteur excitation magnétique en tout point de l'espace de ce problème. On utilisera les expressions des opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques donnés à la fin du texte.

1) Déterminer $\vec{\text{rot}}\ \vec{B}$ en tout point de l'espace. En utilisant la jauge de Coulomb ($\text{div}\ \vec{A} = 0$), montrer que le potentiel vecteur $\vec{A}$ associé obéit à l'équation de Laplace : $\Delta\vec{A} = \vec{0}$.

2) On peut résoudre cette équation en utilisant la méthode de séparation des variables. On cherche les solutions du problème de la manière suivante :

$$\vec{A}(r,\theta) = f(r)\sin\theta\ \vec{u}_z. \tag{1}$$

Pouvez-vous justifier la direction de ce vecteur et le fait que $\vec{A}$ ne dépende pas de z ? Déterminer l'équation différentielle sur $f(r)$.

3) Chercher deux solutions en loi de puissance : r^k. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit alors de la manière suivante :

$$f(r) = Cr^{k_1} + Dr^{k_2}, \tag{2}$$

où C et D sont des constantes. Donner alors k_1 et k_2.

4) En déduire la forme générale du champ magnétique $\vec{B}$ en tout point de l'espace.

5) Que vaut C quand $r > R$? Même question pour D quand $r < R$.

6) Déterminer le vecteur excitation magnétique $\vec{H}$ à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre.

7) Rappeler les relations de passage pour un milieu magnétique. En utilisant ces relations, trouver l'expression finale du vecteur excitation magnétique $\vec{H}$ à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre.

8) En déduire l'aimantation $\vec{M}$ du cylindre ainsi que les courants d'aimantation.

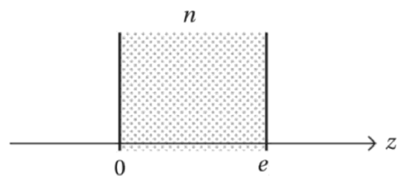
Données : divergence, rotationnel, laplacien d'un champ de vecteur en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned}
\text{div}\ \vec{C} &= \frac{1}{r}\frac{\partial(rC_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial C_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \\
\vec{\text{rot}}\ \vec{C} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial C_z}{\partial\theta} - \frac{\partial C_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta \\
&+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rC_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial\theta}\right)\vec{u}_z \\
\Delta\ f &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

Exercice 2 : Empilement de bi-couches diélectriques

On envoie une OPPM de pulsation ω, de longueur d'onde dans le vide λ_0, d'amplitude E_i et polarisée rectilignement selon l'axe Ox, en incidence normale sur une ou plusieurs lames diélectriques. Les lames sont toutes composées d'un diélectrique *lhi* parfait, non magnétique et transparent. Elles sont planes et supposées infinies dans les deux autres directions et l'espace qui entoure ces lames est de l'air assimilé à du vide.
On admettra que les ondes réfléchies et transmises aux interfaces ont même pulsation et même polarisation que l'onde incidente.

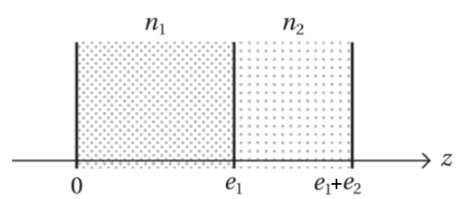
1. On envoie cette onde sur une lame mince d'indice n, d'épaisseur e ajustée de façon à avoir $ne = \lambda_0/4$ et située entre $z = 0$ et $z = e$.



   (a) Représenter sur un schéma les différents vecteurs d'ondes apparaissant dans ce problème et donner leurs expressions en fonction de n et du nombre d'onde dans le vide, k_0. Exprimer k_0 en fonction de n et e.
   Ecrire les expressions de tous les champs électriques et magnétiques apparaissant dans ce problème.

   (b) On note les champs électriques et magnétiques complexes en entrée et sortie de la lame :
   $$\vec{\underline{E}}(z=0^-,t) = \underline{E}\ e^{i\omega t}\ \vec{u}_x \qquad \vec{\underline{B}}(z=0^-,t) = \underline{B}\ e^{i\omega t}\ \vec{u}_y$$
   $$\vec{\underline{E}}'(z=e^+,t) = \underline{E}'\ e^{i\omega t}\ \vec{u}_x \qquad \vec{\underline{B}}'(z=e^+,t) = \underline{B}'\ e^{i\omega t}\ \vec{u}_y$$
   Ecrire les relations de passage en $z = 0$ et $z = e$.
   En déduire la matrice M qui relie les amplitudes des champs de part de d'autre de la lame :
   $$\begin{pmatrix} \underline{E}' \\ c\underline{B}' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \underline{E} \\ c\underline{B} \end{pmatrix}$$
   Montrer que M est complexe et ne dépend que de l'indice n de la couche.

2. On considère maintenant deux couches accolées, l'une d'indice n_1, épaisseur e_1 et l'autre d'indice n_2, épaisseur e_2, avec $n_1 < n_2$ et $n_1 e_1 = n_2 e_2 = \lambda_0/4$.



   (a) Ecrire les matrices M_1 et M_2 qui relient les champs à l'entrée et à la sortie de chaque couche.

   (b) En déduire la matrice qui relie les amplitudes des champs à l'entrée et à la sortie de la bi-couche. Montrer que cette matrice est réelle et ne dépend que de $\alpha = n_1/n_2$.

3. On considère maintenant un empilement de N bi-couches de la question 2. accolées et situées entre $z = 0$ et $z = N(e_1 + e_2)$.

   (a) Déterminer la matrice qui décrit le passage de l'onde à travers ces N bi-couches.

   (b) On note $\underline{r}$ et $\underline{t}$ les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de ce dispositif. Ecrire les amplitudes complexes des champs à l'entrée $(\underline{E}, \underline{B})$ et à la sortie $(\underline{E}', \underline{B}')$ de ce dispositif en fonction de $\underline{r}$, $\underline{t}$ et E_i, l'amplitude de l'onde incidente.

   (c) Déterminer les expressions des coefficients $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de N et $\alpha = n_1/n_2$.

   (d) En déduire l'expression du coefficient de réflexion en énergie R de ce dispositif. Que devient ce coefficient lorsque le nombre de bi-couches N tend vers l'infini ? Commenter.