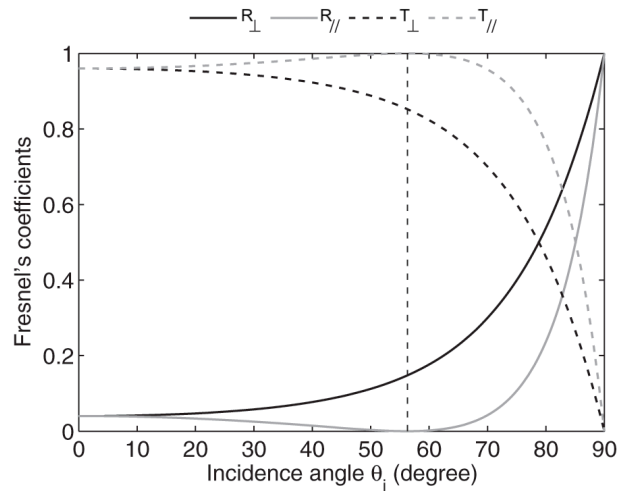


## TD n°4 : Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques

### Test de cours n°8 [à faire à la maison]

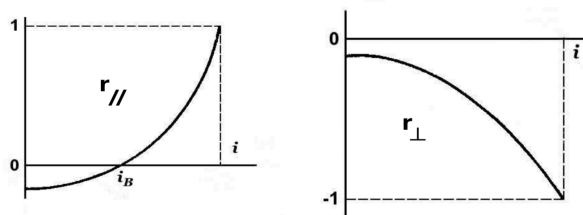
1. Quelle est l'équation de propagation d'une OPPM électromagnétique dans un milieu lhi ?
2. Quelles sont les similitudes et différences entre un milieu conducteur parfait et un milieu diélectrique parfait ?
3. Définir l'indice optique d'un milieu lhi transparent et d'un milieu diélectrique lhi transparent. Quelle est la forme de la dépendance  $n(\lambda)$  dans la plupart des diélectriques lhi transparents ?
4. Qu'est-ce qu'un dioptre en électromagnétisme ?
5. Quelle est la relation de structure et la relation de dispersion d'une OPPM dans un milieu lhi ? Que devient-elle pour un diélectrique lhi transparent ?
6. Ecrire les relations de passage entre deux milieux quelconques possédant les densités surfaciques de charges et courants libres  $\sigma_\ell$  et  $\vec{j}_{sl}$ .  
Que deviennent ces relations entre deux diélectriques lhi transparents d'indices  $n_1$  et  $n_2$  ?
7. Calculer le vecteur de Poynting et sa valeur moyenne pour une OPPM d'amplitude  $E_0$  se propageant selon la direction  $+\vec{u}$  dans un diélectrique lhi transparent d'indice  $n$ .
8. Comment traduit-on la notion de rayon lumineux de l'optique géométrique en électromagnétisme ? Comment formule-t-on les lois de Descartes en électromagnétisme ? Comment les démontre-t-on ?
9. Quelle est l'origine physique des ondes réfléchies et transmises à l'interface entre deux diélectriques lhi transparents ? Quelles sont les propriétés des ondes réfléchies et transmises ?
10. Rappeler les définitions des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude  $\underline{r}$  et  $\underline{t}$  et en énergie  $R$  et  $T$ . Quelle relation relie  $R$  et  $T$  ? Quel est le sens physique de cette relation ?

11. Les coefficients de réflexion et transmission en énergie  $R$  et  $T$  à l'interface air-verre pour une OPPM polarisée parallèlement (indice  $\parallel$ ) ou perpendiculairement (indice  $\perp$ ) au plan d'incidence sont donnés sur la figure ci-dessous en fonction de l'angle d'incidence  $\theta_i$ .



Commenter ces courbes.

12. Les figures ci-dessous représentent les coefficients de réflexion en amplitude à l'interface entre deux diélectriques lhi transparents tels que  $n_1 < n_2$ , pour une OPPM polarisée parallèlement ( $r_{\parallel}$ ) ou perpendiculairement ( $r_{\perp}$ ) au plan d'incidence.



On précise par ailleurs que les coefficients de transmission sont toujours positifs. Commenter le signe de ces coefficients.

13. On rappelle que les coefficients de réflexion en énergie à l'interface air-verre et verre-air valent environ  $R \simeq 4\%$  pour une incidence proche de la normale. Quel est, en pourcentage, l'énergie transmise à travers une vitre pour une incidence proche de la normale ?
14. (*Question difficile, hors programme*) Utiliser le caractère anisotrope du rayonnement dipolaire pour justifier qualitativement pourquoi et à quelle condition il ne peut y avoir d'onde réfléchi sur un dioptre lorsque l'onde incidente est polarisée rectilignement dans le plan d'incidence.

A l'aide d'un dessin, retrouver alors simplement l'expression de l'angle de Brewster  $\theta_{iB}$  en fonction des indices  $n_1, n_2$  des deux milieux.

Que donne sous cet angle la réflexion d'une lumière naturelle ?

### Ex. 1 : Chauffage par micro-ondes

Sous l'action d'un champ  $\vec{E}$  variable, un aliment contenant de l'eau présente une polarisation d'orientation  $\vec{P}$  forcée. Du fait des chocs et de l'inertie des dipôles, ces deux grandeurs sont reliées par l'équation différentielle ;

$$\tau \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{P} = \epsilon_0 \chi_0 \vec{E}$$

où  $\tau = 10^{-12}$  s est le temps de relaxation des molécules d'eau et  $\chi_0$  la susceptibilité statique du milieu.

On considère la propagation dans ce milieu d'une onde électromagnétique de fréquence  $f = 2.45$  GHz (celle des micro-ondes imposée par les mécanismes d'absorption) et de champ :  $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)} \vec{u}_x$ , où  $\underline{k}$  est *a priori* complexe.

1. Montrer que la permittivité relative de ce milieu est complexe :  $\underline{\epsilon}_r = \epsilon' - i\epsilon''$ . Exprimer  $\epsilon'$  et  $\epsilon''$  en fonction de  $\chi_0$  et  $\omega\tau$ .
2. Calculer  $\omega\tau$  et en déduire une expression simplifiée de  $\underline{\epsilon}_r$ . Montrer que  $|\underline{\epsilon}_r| \simeq 1 + \chi_0$ . On notera par la suite  $\epsilon_r = |\underline{\epsilon}_r|$ .

En plus de ses propriétés diélectriques décrites par  $\epsilon_r$ , le milieu est légèrement conducteur, de conductivité électrique  $\gamma = 10^{-7}$  S.m<sup>-1</sup>. Il n'est par ailleurs ni chargé électriquement, ni magnétique.

3. Ecrire les équations de Maxwell dans le milieu considéré en fonction des champs  $\underline{\vec{E}}$  et  $\underline{\vec{B}}$ .

Déterminer l'équation de propagation du champ  $\underline{\vec{E}}$ . En déduire la relation de dispersion donnant  $\underline{k}^2$ .

4. A la fréquence  $f = 2.45$  GHz, l'eau pure a une permittivité relative de module égal à  $\epsilon_r = 76$ . Comparer l'importance des deux types de pertes, les pertes liées à la conduction ohmique et les pertes liées au retard à la polarisation d'orientation. Conclure et commenter.

En déduire une expression approchée de  $\underline{k}$  en fonction de  $\omega/c$ ,  $\epsilon_r$  et  $\omega\tau$ .

5. On pose  $\underline{k} = k_0 e^{-i\phi}$ . Donner les expressions de  $k_0$  et  $\tan \phi$ .

Exprimer  $\underline{\vec{E}}(z, t)$  à l'aide de  $k_0$  et  $\phi$ . En déduire  $\delta$ , la profondeur de pénétration de l'onde dans ce milieu.

Calculer  $\phi$  et  $\delta$ . Conclure.

## Ex. 2 : Polarisation en régime variable : zones de transparence et d'absorption

On étudie l'interaction d'une onde électromagnétique avec une vapeur atomique (milieu matériel peu dense). Le champ électrique de l'onde s'écrit en notation complexe :  $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp i(\omega t - \underline{k}z)$ .

On considère le modèle de l'électron élastiquement lié : chaque électron, de charge  $-e$  et de masse  $m$ , est soumis de la part du coeur de l'atome (noyau et autres électrons) auquel il appartient à une force de rappel élastique,  $-m\omega_0^2 \vec{r}$ , où  $\vec{r}$  est le vecteur position de l'électron par rapport au noyau. L'électron est aussi soumis à une force de frottement fluide,  $-m\Gamma d\vec{r}/dt$ , modélisant les pertes énergétiques par rayonnement électromagnétiques dues au mouvement accéléré de l'électron. En pratique, l'amortissement est faible :  $\Gamma \ll \omega_0$ .

Le milieu est supposé lhi, non polaire, non magnétique et peu dense. La vitesse de l'électron est suffisamment faible pour que l'on puisse le supposer non relativiste.

1. Ecrire l'équation du mouvement d'un électron.

L'électron restant lié à l'atome, on peut négliger la dépendance spatiale du champ électrique au niveau de l'atome. En déduire l'expression de  $\underline{\vec{r}}$  en notation complexe en régime sinusoïdal forcé.

2. Sachant qu'il y a  $N$  atomes par unité de volume, déterminer l'expression du vecteur polarisation du milieu.

En déduire l'expression de la susceptibilité électrique du milieu en fonction de :

$$\chi_0 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2}, \quad \alpha = \Gamma/\omega_0 \quad \text{et} \quad u = \omega/\omega_0.$$

3. Ecrire la permittivité relative sous la forme  $\underline{\epsilon}_r = \epsilon'_r - i \epsilon''_r$ . Expliciter  $\epsilon'_r(u)$  et  $\epsilon''_r(u)$ .

Tracer  $\epsilon'_r(u)$  et  $\epsilon''_r(u)$  en fonction de  $u = \omega/\omega_0$  dans le cas d'un amortissement faible  $\Gamma \ll \omega_0$ .

4. Montrer qu'en écrivant  $\underline{k} = k' - i k''$ , on a  $k'' > 0$  si  $k' > 0$ .

Donner l'expression du champ électrique en fonction de  $k'$  et  $k''$ . Commenter.

5. Montrer que l'on peut définir un indice complexe  $\underline{n} = n' - i n''$ . Quel est le sens physique de  $n'$  et  $n''$  ?

6. Commenter les résultats obtenus. Montrer en particulier l'existence d'une zone d'absorption et de zones de transparence.

Pour le phénomène de polarisation électronique modélisé ici, dans quel domaine spectral observe-t-on généralement le phénomène d'absorption dont rend compte notre modèle ?

### Ex. 3 : Relations de Descartes : questions de cours [à faire à la maison]

On considère un milieu diélectrique  $lhi$ .

1. Ecrire les équations de Maxwell dans ce milieu.
2. Etablir l'équation de propagation du champ électrique.  
En déduire la relation de structure et la relation de dispersion d'une OPPM dans ce milieu. Que devient cette relation si le milieu est transparent, d'indice de réfraction  $n$  ?

On souhaite maintenant établir les lois de Descartes pour la réflexion et la transmission. On considère pour cela deux milieux diélectriques  $lhi$  transparents, d'indices de réfractons  $n_1$  et  $n_2$ , séparés par un dioptre plan.

3. Ecrire les relations de passage des champs électrique et magnétique entre les deux milieux.
4. L'onde incidente est une OPPM de polarisation quelconque se propageant dans une direction quelconque dans le milieu  $n_1$ . On admettra que les ondes réfléchie et transmise sont des OPPM de même pulsation que l'onde incidente.
  - (a) Justifier physiquement pourquoi les ondes incidente, réfléchie et transmise ont même pulsation.
  - (b) Comment doit-on écrire a priori les champs électriques des ondes réfléchie et transmise ?
  - (c) Ecrire les normes des vecteurs d'onde des ondes incidente, réfléchie et transmise en fonction des indices et du nombre d'onde dans le vide  $k_0$ .
  - (d) Ecrire les relations de passage du champ électrique à la traversée du dioptre et en déduire les lois de Descartes de la réflexion et de la réfraction. Retrouver aussi la condition de réflexion totale.

### Ex. 4 : Coefficients de réflexion et réfraction en incidence normale

On considère deux milieux diélectriques  $lhi$  transparents, d'indices de réfraction  $n_1$  et  $n_2$  séparés par un dioptre plan. L'onde incidente dans le milieu  $n_1$  est une OPPM polarisée rectilignement arrivant en incidence normale sur le dioptre. On admettra que les ondes réfléchie et transmise sont des OPPM de même pulsation que l'onde incidente.

1. Ecrire les normes des vecteurs d'ondes incident, réfléchi et transmis en fonction de  $n_1$  et  $n_2$  et du vecteur d'onde dans le vide,  $k_0$ .
2. Ecrire le champ électromagnétique des ondes incidente, réfléchie et transmise.
3. Ecrire les relations de passage des champs électrique et magnétique à la traversée du dioptre.

En déduire les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique en fonction de  $n_1$  et  $n_2$ .

Le champ électrique subit-il un déphasage à la réflexion ? à la transmission ?  
Considérez les 2 cas  $n_1 > n_2$  et  $n_2 > n_1$ .

- Calculer les coefficients de réflexion et de transmission en énergie en fonction de  $n_1$  et  $n_2$ .

Quelle relation lie ces deux coefficients ? Quel est le sens physique de cette relation ?

- Etudier le cas de la réflexion vitreuse ( $n_1 = 1$  et  $n_2 = 1,5$ ). Tracer les champs électriques et magnétiques des ondes incidente, réfléchie et transmise. Calculer les coefficients de réflexion et de transmission. Commenter.

### Ex. 5 : Angle de Brewster et polarisation par réflexion

On s'intéresse à la réflexion et réfraction d'une OPPM à la surface d'un plan d'eau. On modélisera les deux milieux, l'air et l'eau, par deux milieux diélectriques  $lhi$ , d'indices  $n_1 = 1$  et  $n_2 = 1.33$  et séparés par le plan ( $Oxy$ ).

On considèrera une OPPM incidente dont le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} \exp[i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})]$$

arrivant sur la surface d'eau avec un angle  $i_1$  et on notera  $i_2$  l'angle réfracté. On supposera l'onde incidente polarisée rectilignement *dans* le plan d'incidence et on admettra que les ondes réfléchies et transmises sont des OPPM de même pulsation polarisées rectilignement et que pour le cas qui nous intéresse  $n_2 > n_1$ , les champs  $\vec{B}_r$  et  $\vec{B}_t$  correspondants sont parallèles et dans le même sens que  $\vec{B}_i$ .

- Représenter sur un schéma les champs électriques et magnétiques des ondes incidente, réfléchie et transmise et écrire leurs expressions.

- Ecrire les relations de passage des champs électriques et magnétiques entre les deux milieux.

En déduire les rapports des amplitudes,  $\underline{r} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}}$  et  $\underline{t} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}}$  en fonction de  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $n_1$  et  $n_2$ .

- Calculer  $R$  et  $T$ , les coefficients de réflexion et de transmission en énergie en fonction de  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $n_1$  et  $n_2$ . Quelle relation lie  $R$  et  $T$  ?

- Montrer qu'il existe un angle  $i_{1B}$ , appelé angle de Brewster, pour lequel  $R = 0$ . Calculer cet angle.

- On peut de la même façon calculer les coefficients de réflexion et de transmission en énergie pour une onde incidente polarisée rectilignement *perpendiculairement* au plan d'incidence et on obtient [ à faire à la maison ] :

$$R^\perp = \left( \frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \right)^2 \quad \text{et} \quad T^\perp = \frac{4 n_1 n_2 \cos i_1 \cos i_2}{(n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2)^2}$$

Montrer que ce coefficient de transmission  $R^\perp$  est toujours non nul.

- En déduire que si l'onde qui arrive sur le plan d'eau sous incidence de Brewster est une lumière naturelle, alors la lumière réfléchie est totalement polarisée. Préciser la direction de polarisation de l'onde réfléchie.