Produit tensoriel d'espace d'états (cf CT p 154)

Soient 2 espaces : $\mathcal{E}_1$ de dim N_1, de BON $\{|u_n(1)\rangle\}$

↳ $|\psi(1)\rangle$ ket qcq de $\mathcal{E}_1$

s'écrit $|\psi(1)\rangle = \sum_n a_n |u_n(1)\rangle$

$\mathcal{E}_2$ de dim N_2, de BON $\{|u_m(2)\rangle\}$

↳ $|\psi(2)\rangle$ ket qcq de $\mathcal{E}_2$

s'écrit $|\psi(2)\rangle = \sum_m b_m |u_m(2)\rangle$

Espace produit tensoriel $\mathcal{E}$

$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ = espace produit tensoriel de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$

t.q. à tt ket $|\psi(1)\rangle \in \mathcal{E}_1$ on associe une ket de $\mathcal{E}$

et à tt ket $|\psi(2)\rangle \in \mathcal{E}_2$ noté $\boxed{|\psi\rangle = |\psi(1)\rangle \otimes |\psi(2)\rangle}$

svt noté $= |\psi(1)\,\psi(2)\rangle$

prop. du produit tensoriel :

- linéaire par rapport à multiplication par complexe

$(\lambda|\psi(1)\rangle) \otimes |\psi(2)\rangle = |\psi(1)\rangle \otimes (\lambda|\psi(2)\rangle) = \lambda\left[|\psi(1)\rangle \otimes |\psi(2)\rangle\right]$

- distributif

$|\psi(1)\rangle \otimes \left(|\psi(2)\rangle + |\varphi(2)\rangle\right) = |\psi(1)\rangle \otimes |\psi(2)\rangle + |\psi(1)\rangle \otimes |\varphi(2)\rangle$

idem à gauche

- $\boxed{\{|u_n(1)\rangle \otimes |u_m(2)\rangle\} = \text{BON de } \mathcal{E}}$
- $\mathcal{E}$ de dim $N = N_1 N_2$

Ket de $\mathcal{E}$

tt ket $|\psi\rangle \in \mathcal{E}$ s'écrit : $\boxed{|\psi\rangle = \sum_{n,m} c_{n,m}\, |u_n(1)\rangle \otimes |u_m(2)\rangle}$

en particulier : $|\psi\rangle = |\psi(1)\rangle \otimes |\psi(2)\rangle = \sum_{n,m} a_n b_m\, |u_n(1)\rangle \otimes |u_m(2)\rangle \in \mathcal{E}$

d'après les prop. du $\otimes$

Produit scalaire dans $\mathcal{E}$

défini par $\boxed{\langle\varphi(1)|\otimes\langle\varphi(2)|\ |\psi(1)\rangle\otimes|\psi(2)\rangle = \langle\varphi(1)|\psi(1)\rangle\langle\varphi(2)|\psi(2)\rangle}$

Produit tensoriel d'opérateurs

Soient $A(1)$ op. linéaire défini ds $\mathcal{E}_1$: $A(1)|\psi(1)\rangle = |\varphi(1)\rangle \in \mathcal{E}_1$

$A(2)$ " " $\mathcal{E}_2$: $A(2)|\psi(2)\rangle = |\varphi(2)\rangle \in \mathcal{E}_2$

$\otimes$ d'opérateurs défini par :

$$\boxed{[A(1)\otimes A(2)]\ |\psi(1)\rangle\otimes|\psi(2)\rangle = A(1)|\psi(1)\rangle\otimes A(2)|\psi(2)\rangle}$$
$$= |\varphi(1)\rangle\otimes|\varphi(2)\rangle \in \mathcal{E}$$

$\rightarrow A(1)\otimes A(2)$ op. linéaire défini ds $\mathcal{E}$

En particulier :

$\tilde{A}(1) = A(1)\otimes I_1$ = prolongement de $A(1)$ ds $\mathcal{E}$

$\tilde{A}(1)$ souvent noté $A(1)$ par abus

$\tilde{A}(1)\ |\psi(1)\rangle\otimes|\psi(2)\rangle = [A(1)|\psi(1)\rangle]\otimes|\psi(2)\rangle$

$\tilde{A}(1)\tilde{A}(2) = A(1)\otimes I_2\ \ I_1\otimes A(2) = A(1)\otimes A(2)$

on peut m.q. $[\tilde{A}(1), \tilde{A}(2)] = 0$

Exemple $\mathcal{E}_{\vec{r}} = \mathcal{E}_x\otimes\mathcal{E}_y\otimes\mathcal{E}_z$ car var. x, y, z indépendantes

où $\mathcal{E}_x$ = espace des états d'une part à 1 dimension = associé aux fcts d'ondes $\psi_x(x)$

idem pr $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$

BON de $\mathcal{E}_{\vec{r}}$: $\{|\vec{r}\rangle\} = \{|x\rangle\otimes|y\rangle\otimes|z\rangle\} = \{|xyz\rangle\}$

ket qcq de $\mathcal{E}_{\vec{r}}$: $|\psi\rangle = \iiint dx\,dy\,dz\ \psi(x,y,z)\ |x\rangle\otimes|y\rangle\otimes|z\rangle = \iiint d^3r\ \psi(\vec{r})|\vec{r}\rangle$

en particulier : $|\varphi\rangle = |\varphi_x\rangle\otimes|\varphi_y\rangle\otimes|\varphi_z\rangle = \iiint dx\,dy\,dz\ \varphi_x(x)\varphi_y(y)\varphi_z(z)\ |xyz\rangle$

↳ cas où on peut séparer les variables x, y, z de la fct d'onde $\varphi(\vec{r}) = \varphi_x(x)\varphi_y(y)\varphi_z(z)$

Exemple $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\vec{r}}\otimes\mathcal{E}_s$ où $\mathcal{E}_{\vec{r}}$ = espace des états orbitaux associés aux fcts d'ondes $\psi(\vec{r}) = \mathcal{E}_x\otimes\mathcal{E}_y\otimes\mathcal{E}_z$

$\mathcal{E}_s$ = espace des états de spin

BON de $\mathcal{E}$: $\{|\vec{r}\rangle\otimes|s, m_s\rangle\}$

si $|\psi\rangle\in\mathcal{E}_{\vec{r}}$, $|\psi_s\rangle\in\mathcal{E}_s$ alors $|\psi\rangle\otimes|\psi_s\rangle\in\mathcal{E}$

Résolution de l'oscillateur harmonique 3D par le produit tensoriel

- $$\boxed{\mathcal{H} = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 R^2} = \text{hamilt. de l'osc. harm 3D.}$$

$$= \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 Y^2 + \frac{P_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 Z^2$$

$$= \boxed{\mathcal{H}_X + \mathcal{H}_Y + \mathcal{H}_Z}$$

où $\mathcal{H}_X = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$ = hamilt. de l'osc. harm 1D

$= \text{op.} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ en représentation $\{|x\rangle\}$

↳ n'agissant que sur la variable x

$\Rightarrow \mathcal{H}_X$ = opérateur défini ds ss-espace $\mathcal{E}_X$

de m̂, $\mathcal{H}_Y$ " " " $\mathcal{E}_Y$

$\mathcal{H}_Z$ " " " $\mathcal{E}_Z$

- $\mathcal{H}_X, \mathcal{H}_Y, \mathcal{H}_Z$ commutent 2 à 2 car agissent sur ss-espaces distincts
  - → ils commutent avec $\mathcal{H}$
  - → ∃ base propre commune à $\{\mathcal{H}_X, \mathcal{H}_Y, \mathcal{H}_Z, \mathcal{H}\}$

Idée : chercher des états propres de $\mathcal{H}$ qui soient états propres de $\mathcal{H}_X, \mathcal{H}_Y, \mathcal{H}_Z$

- Etats propres de $\mathcal{H}_X$: $\mathcal{H}_X |\varphi_{nx}\rangle = E_{nx} |\varphi_{nx}\rangle$

$\{|\varphi_{nx}\rangle\}$ = BON de $\mathcal{E}_X$

Idem pr $\mathcal{H}_Y$ et $\mathcal{H}_Z$ ...

- les kets $|\varphi_{nx}\rangle \otimes |\varphi_{ny}\rangle \otimes |\varphi_{nz}\rangle$:
  - forment une base de $\mathcal{E}_{\vec{r}} = \mathcal{E}_X \otimes \mathcal{E}_Y \otimes \mathcal{E}_Z$
  - st états propres de $\mathcal{H}_X, \mathcal{H}_Y, \mathcal{H}_Z$ de val. ppes E_{nx}, E_{ny}, E_{nz}

$$\mathcal{H}_X \left(|\varphi_{nx}\rangle \otimes |\varphi_{ny}\rangle \otimes |\varphi_{nz}\rangle\right) = \left(\mathcal{H}_X|\varphi_{nx}\rangle\right) \otimes |\varphi_{ny}\rangle \otimes |\varphi_{nz}\rangle$$
$$= E_{nx} |\varphi_{nx}\rangle \otimes |\varphi_{ny}\rangle \otimes |\varphi_{nz}\rangle$$

idem pr $\mathcal{H}_Y, \mathcal{H}_Z$ ...

– sont états propres de $\mathcal{H}$ de val. propre $E_{n_x}+E_{n_y}+E_{n_z}$

$$\mathcal{H}\left(|\varphi_{n_x}\rangle\otimes|\varphi_{n_y}\rangle\otimes|\varphi_{n_z}\rangle\right) = \left(\mathcal{H}_x|\varphi_{n_x}\rangle\right)\otimes|\varphi_{n_y}\rangle\otimes|\varphi_{n_z}\rangle$$
$$+ |\varphi_{n_x}\rangle\otimes\left(\mathcal{H}_y|\varphi_{n_y}\rangle\right)\otimes|\varphi_{n_z}\rangle$$
$$+ |\varphi_{n_x}\rangle\otimes|\varphi_{n_y}\rangle\otimes\left(\mathcal{H}_z|\varphi_{n_z}\rangle\right)$$
$$=\left(E_{n_x}+E_{n_y}+E_{n_z}\right)|\varphi_{n_x}\rangle\otimes|\varphi_{n_y}\rangle\otimes|\varphi_{n_z}\rangle$$

$\Rightarrow$ $\boxed{|\varphi_{n_x}\rangle\otimes|\varphi_{n_y}\rangle\otimes|\varphi_{n_z}\rangle \text{ sont kets propres de } \mathcal{H} \text{ de val. ppes } E_{n_x}+E_{n_y}+E_{n_z}}$

↳ en représentation $\{|\vec{r}\rangle\}$: $\varphi_{n_x}(x)\,\varphi_{n_y}(y)\,\varphi_{n_z}(z)$

<u>Rq</u>: on note en gl les états propres $|n_x\, n_y\, n_z\rangle$
l'énergie correspondante s'écrit $E_{n_x n_y n_z} = \left(n_x+n_y+n_z+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega$
avec $(n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{N}^3$

<u>Rq</u> : On peut m.q. ce résultat est + général (cf CT p 162)
Si $V(x,y,z) = V_1(x)+V_2(y)+V_3(z)$ alors $\mathcal{H} = \mathcal{H}_x+\mathcal{H}_y+\mathcal{H}_z$
Alors kets propres de $\mathcal{H}$ = $\otimes$ des kets propres des $\mathcal{H}_i$
de val. propres = $\sum$ val. propres des $\mathcal{H}_i$